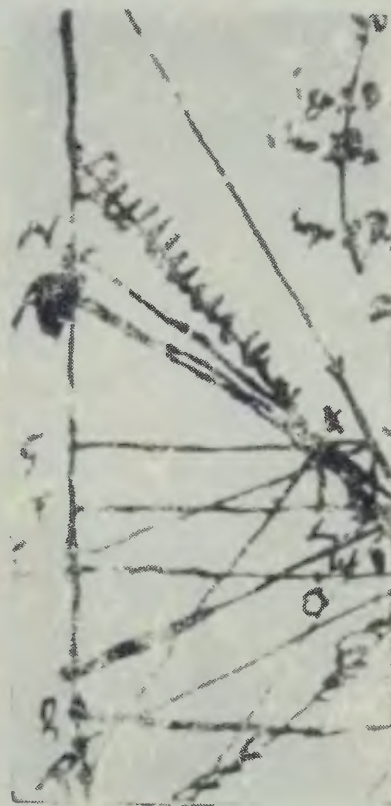


VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

С ДРЕВНЕЙШИХ
ВРЕМЕН
ДО НАЧАЛА
НОВОГО
ВРЕМЕНИ

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ



ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН ДО НАЧАЛА XIX СТОЛЕТИЯ

В трех томах

Под редакцией А. П. ЮШКЕВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1970

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Том первый

С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН
ДО НАЧАЛА
НОВОГО ВРЕМЕНИ

БИБЛИОТЕКА НМУ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОЛЛЕДЖ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1970

Авторский коллектив тома:

доктор физ.-матем. наук И. Г. БАШМАКОВА
кандидат физ.-матем. наук Э. И. БЕРЕЗКИНА
кандидат физ.-матем. наук А. И. ВОЛОДАРСКИЙ
доктор физ.-матем. наук Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД
доктор физ.-матем. наук А. П. ЮШКЕВИЧ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.	7
Первая часть.	
МАТЕМАТИКА В ДРЕВНОСТИ	
<i>Первая глава. ДОИСТОРИЧЕСКИЕ ВРЕМЕНА</i> (Э. И. Березкина, Б. А. Розенфельд).	9
Возникновение понятия числа (9). Возникновение числовых обозначений (12). Возникновение понятий о геометрических фигурах (18)	
<i>Вторая глава. ДРЕВНИЙ ЕГИПЕТ</i> (Э. И. Березкина, А. П. Юшкевич) . .	16
Древнейшие цивилизации (16). Древний Египет (17). Источники (17). Египетская нумерация (21). Математические знания египтян (21). Искусство счета (23). Египетские дроби (25). Красные числа (27). Задачи на «аха» (29). Прогрессии (30). Геометрические знания (30). Вычисление площади круга (31). Объем пирамиды (32). Значение математики древнего Египта (33)	
<i>Третья глава. ВАВИЛОН</i> (Э. И. Березкина, А. П. Юшкевич)	34
Древнее Двуречье (34). Источники (35). Вавилонская нумерация (36). Вычислительная техника (37). Арифметические задачи (40). Арифметические прогрессии в астрономии (40). Алгебраические методы (42). Квадратные уравнения (42). Приближенное вычисление корней (46). Геометрия у вавилонян (47). Теорема Пифагора (49). Правильные многоугольники (51). Подобие и пропорциональность (53). Теоретико-числовые задачи (54). Значение математики древнего Вавилона (56)	
<i>Четвертая глава. ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ</i> (И. Г. Башмакова)	58
Греческое чудо (58). Греческая наука (59). Греческие нумерации (62). Фалес (64). Школа Пифагора (66). Арифметика дельных чисел (68). Арифметика дробей и первая теория отношений (70). Несовместимость (72). Первые иррациональности (74). Классификация иррациональностей Евдокса (74). Теория делимости (75). Первый критерий несоизмеримости (77). Геометрическая алгебра (78). Алгебра древних и геометрия циркуля и линейки (81). Первые неразрешимые задачи (82). Кубические уравнения (86). Парадоксы бесконечного (87). Демокрит (93). Евдокс (94). Отношения и числа (98). «Метод исчерпывания» (101)	
<i>Пятая глава. ЭЛЛИНИСТИЧЕСКИЕ СТРАНЫ И РИМСКАЯ ИМПЕРИЯ</i> (И. Г. Башмакова).	106
Наука в эллинистических странах (106). Евклид (107). «Начала» Евклида (108). Аксиоматика (109). Тринадцать книг «Начал» (111). Архимед (114). Интегральные методы Архимеда (117). Дифференциальные методы Архимеда (124). Другие математические работы Архимеда (128). Архимед и математика Нового времени (128). Аполлоний (129). «Конические сечения» Аполлония (130). Эпигоны (139). Римские завоевания (140). Герон Александрийский (141). Менелай Александрийский (141). Клавдий Птолемей (142). Алгебра Диофанта (144). Диофантовы уравнения (146). Закат античной математики (151). Значение греческой математики (152)	

Вторая часть.

МАТЕМАТИКА В СРЕДНИЕ ВЕКА

ВВЕДЕНИЕ.	154
<i>Первая глава. КИТАЙ</i> (Э. И. Березкина).	156
Древний и средневековый Китай (156). Китайская нумерация (157). Арифметические действия (160). «Математика в девяти книгах» (161). Дроби (162). Правило двух ложныхположений (163). Системы линейных уравнений со многими неизвестными (165). Отрицательные числа (167). Квадратные уравнения (169). Метод тянь-юань (171). Теоретико-числовые задачи (174). Интерполирование (174). Суммирование рядов (175). Геометрические задачи (175). Значение математики древнего и средневекового Китая (178)	
<i>Вторая глава. ИНДИЯ</i> (А. И. Володарский).	179
Древняя и средневековая Индия (179). Индийская нумерация (181). Арифметические действия (183). Дроби (185). Задачи на пропорции (187). Алгебра (188). Отрицательные и иррациональные числа (190). Линейные уравнения (191). Квадратные уравнения (192). Неопределенные уравнения (194). Теорема Пифагора (196). Площади и объемы (197). Тригонометрия (199). Бесконечные ряды (201). Значение математики Индии (204)	
<i>Третья глава. СТРАНЫ ИСЛАМА</i> (Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич).	205
Арабский халифат (205). Арабские нумерации (209). Арифметические действия (211). Дроби (212). Извлечение корней и «бином Ньютона» (214). Теория отношений и действительные числа (216). Арифметические задачи (218). Алгебра; квадратные уравнения (219). Кубические уравнения (222). Теория чисел (227). Геометрические вычисления (229). Геометрические построения (229). Теория параллельных (231). Тригонометрия (234). Инфинитезимальные методы (238). Значение математики стран ислама (243)	
<i>Четвертая глава. СРЕДНЕВЕКОВАЯ ЕВРОПА</i> (Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич).	245
Феодализм в Европе (245). Математика в Византии (249). Математика в Грузии и Армении (250). Древнерусская нумерация (252). Древнерусские математические сочинения (252). Первые математические сочинения в Западной Европе (254). Распространение позиционной арифметики (256). Переводы с арабского и греческого (257). Первые университеты (259). Леонардо Пизанский (260). Иордан Неморарий (267). Развитие физики (269). Томас Брадвардин (270). Ричард Суайнхед (273). Николь Орем (275)	
<i>Пятая глава. ЭПОХА ВОЗРОЖДЕНИЯ</i> (Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич).	284
Лука Пачоли (286). Никола Шюке (289). Косисты (290). Решение уравнений третьей и четвертой степеней (292). Мнимые величины (296). Михайль Штифель (298). Формула бинома (300). Десятичные дроби и алгебраические обозначения Стевина (301). Иррациональные числа (304). Дробные показатели (306). Алгебра Петра Рамуса (307). Алгебра Франсуа Виста (308). Отрицательные числа (315). Тригонометрия (317). Теория перспективы (321). Леонардо да Винчи (323). Альбрехт Дюрер (324). Теория параллельных линий (325). Значение математики эпохи Возрождения (326)	
БИБЛИОГРАФИЯ.	327
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ.	343

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем сочинении изложена история математики до начала XIX в. Написанный коллективом советских ученых, этот труд отражает основные общие установки советской школы историков математики. Поступательное движение математики рассматривается не только как процесс создания все более совершенных идей и методов исследования пространственных форм и количественных отношений действительного мира, но и как социальное явление. Раз уже возникшие математические структуры всегда развиваются в той или иной мере самостоятельно, но это саморазвитие происходит в условиях и на основе практической деятельности людей и определяется, иногда непосредственно, иногда в конечном счете, потребностями общества.

Учитывая эти обстоятельства, авторы ставили своей задачей, с одной стороны, установить движущие силы прогресса математики и с этой целью исследовали ее взаимосвязь с общественным базисом, техникой, естественными науками, философией. С другой стороны, анализируя внутренний ход событий в истории математики, авторы стремились оценить достижения прежних времен с точки зрения нынешнего состояния и тенденций науки. Это, естественно, влечет за собой во многих случаях пересмотр прежних оценок. Так, успехи современной теории чисел и алгебраической геометрии приводят к новому пониманию открытий Диофанта, теория суммирования рядов заставляет иначе, чем это делалось еще недавно, подойти к эйлеровой концепции расходящихся рядов, а бурный расцвет вычислительной математики породил гораздо большее, чем прежде, внимание к приближенным методам старых времен.

В решении всех этих задач авторам приходилось преодолевать немалые трудности. Это в полной мере относится к их стараниям дать марксистский анализ проблем возникновения и развития отдельных математических наук. Здесь, как и в ряде других случаев, авторы должны были многие вопросы решать впервые. Конечно, они не претендуют на то, что их решения являются окончательными.

Историю математики можно писать в различных планах. Можно было бы положить во главу угла историю отдельных задач или идей, проследивая их по отдельности, или творчество отдельных великих людей либо научных школ, или же достижения отдельных народов и т. д. В данном труде на первом плане стоит развитие математики как единого целого. Поэтому главное место занимает история основных понятий, методов и

алгоритмов в их внутренних взаимодействиях и последовательном развитии во времени, которое мы подразделяем, как принято обычно в общей истории. Изложение других сторон исторического процесса подчинялось этой общей цели, и они освещены либо по ходу дела, либо в общих характеристиках соответствующих эпох. Мы не скидываем со счета «человеческий фактор» истории науки, но биографии в книге невелики, а о менее значительных ученых сообщаются только годы жизни и другие основные сведения.

Труд разделен на три тома. Первый посвящен древности (первая часть), Средним векам и эпохе Возрождения (вторая часть), второй — XVII в. и третий — XVIII в. Поскольку книга предназначена для широкого круга читателей, знакомых с математикой в объеме, не превосходящем курс высших технических школ, мы должны были оставить в стороне многие подробности, с которыми желающие могут ознакомиться по литературе, приведенной в конце каждого тома. Те математические понятия, которые, по нашему предположению, могут быть незнакомы читателю, пояснены в ходе изложения. Для удобства пользования книгой в каждом томе имеется именной указатель; в нем дана и оригинальная транскрипция имен. Слова в квадратных скобках в цитатах являются вставками, сделанными для ясности.

Авторский коллектив нашего труда состоит из двенадцати человек. В редакционной подготовке этого издания участвовали, кроме нижеподписавшегося, Б. А. Розенфельд и А. И. Володарский. При этом ставилась задача придать всему изложению возможно более единый характер, но, разумеется, полностью сгладить личные особенности стиля было невозможно, да вряд ли и требовалось. В подавляющем большинстве случаев взгляды авторского коллектива были едины; в отдельных случаях личные мнения того или иного автора выражены в такой форме, что их принадлежность очевидна.

Именные указатели составлены А. Ф. Лапко.

Авторы благодарны Ф. А. Медведеву, прочитавшему всю рукопись и сделавшему много полезных замечаний, Н. А. Зиминной, помогавшей при изготовлении иллюстраций, Н. Г. Хайретдиновой, оказавшей большую помощь при оформлении рукописи. В получении фотографий портретов английских математиков, хранящихся в различных музеях и частных коллекциях, широкое содействие оказал куратор Музея истории науки в Оксфорде доктор Ф. Р. Меддисон, а многие портреты французских математиков нам любезно предоставила г-жа Ж. Гожа из Архива Академии наук Института Франции. Доктор Меддисон и профессор Г. Фрейденталь (Утрехт) дали ряд ценных советов относительно произношения многих английских и голландских фамилий. Всем им мы также выражаем свою искреннюю признательность.

А. П. Юшкевич

П Е Р В А Я Ч А С Т Ь

МАТЕМАТИКА В ДРЕВНОСТИ

ПЕРВАЯ ГЛАВА

ДОИСТОРИЧЕСКИЕ ВРЕМЕНА

Возникновение понятия числа

Такие основные математические понятия, как число или простейшие геометрические фигуры, возникли задолго до появления математических текстов. Понятия числа и геометрической фигуры, которые представляются нам очень простыми и привычными, на самом деле являются абстрактными понятиями, которые могли образоваться только в результате длительной умственной работы. Подобно тому, как понятия дуба и сосны появляются намного раньше общего понятия дерева, так и понятия двух рук и пяти пальцев возникают намного раньше общих понятий двух и пяти.

Когда первобытному охотнику нужно было узнать, все ли собаки в своре на месте, он не считал их, а просто, окинув взором свору, видел, какой собаки не хватает. Такой «чувственный счет», доступный даже утке, чувствующей, весь ли ее выводок следует за ней к водоему, существовал задолго до возникновения счета.

Первым шагом к возникновению счета было установление, как мы сейчас говорим, «взаимно однозначного соответствия» между считаемыми предметами и некоторым другим множеством. Оба сравниваемых множества предметов могут быть заранее неизвестны; например, при обмене между первобытными племенами обмениваемые предметы просто раскладывались в два ряда, так что взаимно однозначное соответствие между ними устанавливалось фактически. Именно так описывает Дж. Морган обмен урей на корни у австралийских племен. Затем появляются своего рода эталоны счета — естественные, как пять пальцев на руке, или искусственные, как специально приспособленные для этой цели палочки или камешки. Именно появление множества-эталона, символизирующего какое-нибудь конкретное число, привело к возникновению понятия числа. Судя по этнографическим и лингвистическим данным, первые множества-эталоны были естественными. Любой человек знал, что на небе Луна одна, у человека два глаза и на руке пять пальцев. Не удивительно поэтому, что этими словами он стал обозначать числа 1, 2 и 5. В таких случаях говорили, что предметов столько, сколько Лун, сколько глаз или сколько пальцев на руке. Подобное понятие числа вполне соответствует тому уровню развития языка у некоторых малоразвитых народов, когда в нем еще

отсутствуют абстрактные прилагательные типа «круглый», «черный», — вместо этих слов употребляются сравнения: «как Луна», «как вороново крыло». Пережиток этой системы мы встречаем в древней индийской словесной системе счисления, где единица называлась Луной, Землей, Брахмой, два — близнецами, глазами, руками, пять — чувствами, стрелами бога любви Камадевы, шесть — запахами, семь — горами, восемь — богами и т. д.

Этот этап счета при помощи «конкретных» чисел сменился следующим, когда из всего разнообразия совокупностей была выбрана одна, наиболее пригодная для счета. Очевидно, удобнее было пользоваться такой совокупностью, в которую входили более или менее однородные предметы, например пальцы рук. Если их не хватало, в ход шли пальцы ног. Так, у индейцев племени абибонов число 5 называлось «рука», 10 — «две руки», 20 — «руки и ноги»; в названии 4 — «пальцы страуса» — отражена более ранняя ступень счета. У зулусов каждый палец обозначал определенное число; например, слово «татизитуна» (буквально — «взять большой палец руки») обозначало 6, а «у комбиле», т. е. «он указал», — 7 и т. д. Для такого счета было характерно осязаемое взаимно однозначное соответствие: у некоторых южноафриканских племен при счете затрагиваются до какого-либо предмета по очереди пальцами, начиная с мизинца левой руки. У австралийцев и полинезийцев каждая часть тела имела свое название и точно соответствовала месту в своеобразной системе счисления: начиная с мизинца левой руки шли пальцы, запястье, локоть, плечо и т. д., кончая мизинцем правой руки, и обратно. Такой живой шкалой, которая всегда «при себе», пользовались, чтобы сообщить, например, дружественному племени о количестве воинов, собираемых племенами, или о числе дней, по прошествии которых следует выходить на охоту.

Прекрасный образец счета такого типа оставил нам русский исследователь Новой Гвинеи Н. Н. Миклухо-Маклай. Он попросил папуасов подсчитать число дней до возвращения корвета «Витязь», нарезав для этого полоски бумаги.

«Первый, раскладывая кусочки бумаги на колене, при каждом обрезке повторял «наре, наре» (один); другой повторял слово «наре» и загибал при этом палец прежде на одной, затем на другой руке. Насчитав до десяти и согнув пальцы обеих рук, опустил оба кулака на колени, проговарив: ...«две руки», причем третий папуас загнул один палец руки. Со вторым десятком было сделано то же, причем третий папуас загнул второй палец; то же самое было сделано для третьего десятка; оставшиеся бумажки не составляли четвертого десятка и были оставлены в стороне. Все, кажется, остались довольными»¹.

Здесь описаны и действительный счет, сопровождаемый перекладыванием полосок, и живая шкала — пальцы рук, и групповой счет. Первый папуас занят инструментальным счетом, он перекладывает полоски, обозначающие дни, второй фиксирует единицы, третий — десятки.

О времени появления общего понятия числа у народов Европы и Азии можно сделать вывод, сравнивая названия чисел у народов с родственными языками. Мы видим большое сходство между русским числительным «один», немецким *eins*, английским *one*, французским *un*, латинским *unus* и точно так же между числительными «два», *zwei*, *two*, *deux*, *duo*, или «три»,

¹ Н. Н. Миклухо-Маклай. Путешествия. Собрание сочинений, т. 1. М.—Л., 1950, стр. 141.

dreï, three, trois, tres на тех же языках. В то же время по-грузински эти же числительные: эрти, ори, сани, по-турецки: bir, iki, üç, по-венгерски: egy, kettő, három, по-арабски: ахад, иснан, салас. Сходство числительных у индоевропейских народов показывает, что названия чисел у предков этих народов появились еще в те далекие времена, когда они говорили на одном языке.

Происхождение названий числительных большей частью трудно проследить, но, например, тот факт, что арабское «саб'» — 7 имеет один корень с глаголом «саб'а» — «растерзать на части», указывает на то, что число 7 предки арабов связывали с неопределенно большим числом частей, на которые дикий зверь может растерзать свою жертву; откуда видно, что слово «саб'» первоначально обозначало неопределенно большое количество (с этим связано мистическое значение числа 7 в религиях, родственных религии предков арабов).

Чрезвычайно интересны названия числительных на языке народов Восточной Африки суахили: если для 1, 2, 4, 5, 8 и 10 на этом языке собственные названия moja, mbili, tatu и т. д., то названия sita, saba, tisa для 6, 7, 9 представляют собой искажения арабских числительных «сит», «саб'», «ти», то же относится к названиям десятков от 20 до 90. Отсюда видно, что к тому времени, когда у побережья Восточной Африки появились арабские купцы, у местных жителей еще не были созданы устойчивые собственные названия для этих чисел.

Заметим, что у большинства народов названия десятков образуются по схеме $n \cdot 10$, где n — число десятков (например, двадцать, тридцать, пятьдесят и т. д.). В этой связи очень интересны исключения во французском языке, где 70 называется soixante-dix ($60 + 10$), 80 — quatre-vingt (4×20), 90 — quatre-vingt-dix ($4 \times 20 + 10$), т. е. начиная с 70 французы считают не десятками, а двадцатками. Более последовательно счет двадцатками проведен в грузинском языке, где 10 — ати, 20 — оци, 30 — опдаати ($20 + 10$), 40 — ормоци (2×20), 50 — ормоцдаати ($2 \times 20 + 10$), 60 — самоци (3×20) и т. д.

В большинстве современных языков названия числительных основаны на десятичной системе, т. е. на представлении чисел в виде суммы числа единиц (до 10), числа десятков (до 100), числа сотен (до 1000) и т. д. Несомненно, что в основе этой системы лежит счет на пальцах. Именно так полталл Аристотель, к мнению которого уместно добавить еще слова А. Лебега: «Возможно, что если бы люди имели одиннадцать пальцев, была бы принята одиннадцатиричная система счисления»¹.

Впрочем, в отдельных случаях, когда после счета на пальцах считалась и вся рука, возникла одиннадцатиричная система счисления, которая, по-видимому, имела у новозеландцев, имеющих специальные названия для 1, 2, 3-й степеней одиннадцати и представлявших 12, 13, 22 в виде $11 + 1$, $11 + 2$, $2 \cdot 11$.

В некоторых языках числительные сохраняют следы пятиричной системы, в этих языках пальцы второй руки называются так же, как пальцы первой с прибавлением слова, обозначающего 5 пальцев или руку. Например, в языке шумеров — первоначального населения Междуречья, заложившего начала культуры древнего Вавилона — 7 — имин [$=5(=и) + 2(=мин)$], а 9 — илимму [$=5 + 4(=лимму)$], а в языке аптеков — первоначального населения Мексики — 6 — чикюасе [$=5 + 1(=се)$], 7 — чикоме

¹ А. Лебег. Об измерении величин. М., 1960, стр. 22.

$1=5 + 2(=ome)$], а 9 — чикунауи [$=5+4(=науи)$]; число 5, которое некогда называлось у ацтеков «чику», впоследствии получило название «ма-куили».

Двадцатиричные названия у французов и грузин представляют собой пережитки счета двадцатками, при котором считались не только пальцы рук, но и пальцы ног. Двадцатиричные названия десятков встречаются в ряде индоевропейских языков (например, в датском и осетинском), в ряде языков народов Кавказа, принадлежащих к самым разнообразным языковым группам (кроме упомянутых грузинского и осетинского, в абхазском, чеченском и др.), а также в некоторых других языках, например ацтекском.

На самых первоначальных ступенях развития человек пользовался и двоичной системой счисления. Например, на языке одного из племен островов Торресева пролива существуют следующие наименования: 1 — урапун, 2 — окоза, 3 — окоза-урапун, 4 — окоза-окоза, 5 — окоза-окоза-урапун, 6 — окоза-окоза-окоза и т. д.

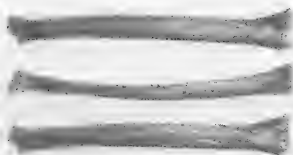
Индийское племя абибонов полтора века назад вело счет таким образом: 1 — инитара, 2 — иньоака, 3 — иньоака-инитара, а далее употреблялись специальные названия числительных, основанные уже по пятиричной системе. Ниже мы рассмотрим исчисление индийского племени майя, основанное на двадцатиричной системе, и исчисление вавилонян, — на шестидесятиричной системе.

Возникновение числовых обозначений

Сведения о результатах счета первоначально хранили при помощи зарубок на дереве или на костях либо узелков на веревках. Старейшей известной в настоящее время записью числа является запись на лучевой кости молодого волка длиной 18 см в виде 55 зарубок, расположенных по 5, причем после 25 зарубок идет длинная черта. Эта кость была найдена около деревни Вестонице в Моравии (Чехословакия) в 1937 г. и относится к XXX в. до н. э.; кость служила, по-видимому, для записи трофеев доисторических охотников. Зарубками, обозначающими долги на бирках, раскалывающихся на две половины, одна из которых хранится у должника, а другая у кредитора, пользовались в Западной Европе даже в XIX в. (известный пожар английского парламента в 1834 г. произошел при сжигании таких бирок в парламентских печах). О распространении записей при помощи зарубок свидетельствует известное выражение «заруби себе на носу». Инки записывали свои долговые обязательства с помощью узелков на цветных веревках — перуанских квипу. Аналогичные квипу встречались у землевладельцев некоторых районов Китая и Японии еще в нашем столетии.

Перейдем теперь к принципам изображения чисел при помощи цифр у разных народов. Такое обозначение, называемое нумерацией (от латинского *numerus* — число), первоначально было основано на так называемых аддитивном (от латинского *additio* — сложение), субстративном (*subtractio* — вычитание) и мультипликативном (*multiplicatio* — умножение) принципах.

Аддитивный принцип состоит в том, что вводится несколько основных знаков, например для 1, 10, 100, а остальные числа вида n , $10n$, $100n$



Зарубки на костях
(*K. Absolon. The world earliest portrait — 30 000 years old.*
Illustrated London News, 2.X.1937)

изображаются соответственным знаком, повторенным n раз. Аддитивная нумерация непосредственно отражает инструментальный счет с палочками, ракушками или другими предметами. Мы встречались с аддитивным принципом в названиях чисел племен островов Торрессова пролива. Субтрактивный принцип состоит в том, что сочетание цифр mn , где $m < n$, означает разность $n - m$, а мультипликативный принцип — в том, что сочетание цифр mn означает произведение чисел m и n . Оба эти принципа применяются и в названиях чисел: на мультипликативном принципе основаны названия десятков и сотен в индоевропейских языках, в частности, русские названия 20, 30, 50—80 и 200—900, с субтрактивным принципом связано слово «девятисто», возникшее в результате «скрещивания» первоначального названия этого числа «девятыдесят» (ср. *devadesát* в современном чешском языке) и выражения «10 до 100». Еще более нагляден этот принцип в финском языке, где названия 8 — *kahdeksan* и 9 — *yhdeksan* представляют собой сокращения выражений — «2 (kaksi) до 10» и «1 (*üksi*) до 10».

Классическим примером применения аддитивного и субтрактивного принципов является применяемая и нами римская нумерация (см. стр. 22): римские цифры II, III, VI, VII, VIII, XX, XXX и т. д. основаны на аддитивном принципе, а римские цифры IV, IX, XL — на субтрактивном принципе.

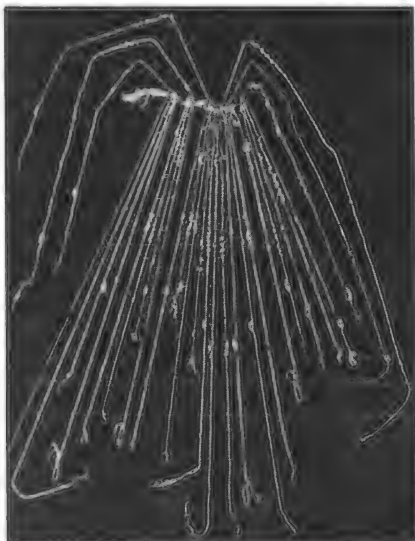
Возникновение понятий о геометрических фигурах

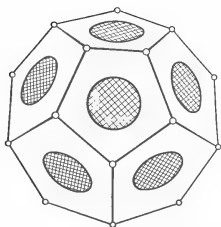
С конкретными геометрическими фигурами человек столкнулся в своей трудовой деятельности при выделке орудий труда и сосудов, при обработке полей и постройке зданий. Уже в глубокой древности изготовлялись скребки и ножи в форме дисков, треугольников, ромбов и сегментов, круглые сосуды; поля обычно имели форму прямоугольника, а здания — форму конуса, цилиндра и параллелепипеда.

Большинство общепринятых в настоящее время в геометрии названий геометрических фигур являются греческими, обозначающими различные предметы той или иной формы, с которыми люди сталкивались в своей

практической деятельности: слово «центр» происходит от греческого слова *κέντρον* (в латинской форме *centrum*), обозначавшего палку с заостренным концом, которой погоняли быков (первоначально это слово было названием ножки циркуля, ставящейся в центр описываемой им окружности). Слово «ромб» происходит от слова *ῥομβος* — волчок, «трапеция» — от слова *τραπέζιον* — «столик» (от того же корня происходит и «трапеза»). Слово «призма» происходит от слова *πρίσμα* — опиленная, «сфера» — от слова *σφαῖρα* (*sphaera*) — «мяч», «конус» — от слова *κῆνος* (*conus*) — сосновая шишка, «цилиндр» — от слова *κύλινδρος* (*cylindrus*) — валик, каток. «Пирамида» происходит от древнеегипетского названия египетских пирамид «пурама», которому греки придали форму *πυραμῖς*. «Линия» (по-латыни *linea*) происходит от латинского слова *linum* — лен; первоначально под линией понимали натянутую льняную нить. «Точка» происходит от глагола «ткнуть», так же как равнозначное слово «пункт» про-

Узловой счет пиков
(Нью-Йорк, Американский музей естественной истории)





Бронзовый додекаэдр этрусков
(*F. Lindemann. Zur Geschichte
der Polyeder. Sitzungsberichte
der Bayr. Akademie der Wissen-
schaften, mathem.-naturwiss.
Abt., 1934, S. 265—275*)



Геометрические орнаменты на греческих вазах

исходит от латинского глагола *pungo* — укалываю, т. е. первоначально под точкой понимали укол (ср. медицинский термин «пункция» — иглоукалывание).

Эти примеры показывают, что и в геометрии сначала появились геометрические эталоны: мяч — для шарообразных предметов, сосновая шишка — для остроконечных и т. д., а впоследствии названия этих эталонов стали названиями абстрактных геометрических фигур.

Создание понятий о геометрических фигурах было тесно связано с изображением различных плоских фигур на рисунках и орнаментах и с изготовлением моделей различных тел.

ВТОРАЯ ГЛАВА

ДРЕВНИЙ ЕГИПЕТ

Древнейшие цивилизации

Наиболее древние письменные математические тексты, известные в настоящее время, сохранились примерно от начала второго тысячелетия до н. э. К этому времени относится расцвет двух великих цивилизаций древнего Востока — Египта и Вавилона, возникших в долинах Нила и Двуречья Тигра и Евфрата. Одновременно с древним Египтом и Вавилоном появились цивилизации в Индии — в долинах Инда и Ганга, в Китае — в долинах Хуанхэ и Янцзы и, может быть несколько позже, в Средней Азии и Закавказье, на островах и европейском и азиатском побережье Средиземного моря, в Индокитае и Индонезии. Математические документы сохранились только в Египте, Месопотамии, Индии и Китае. Во второй и третьей главах мы рассмотрим математические достижения египтян и вавилонян; о математике древнего Китая и Индии мы будем говорить при изложении математики этих стран в Средние века. О математике европейского Средиземноморья до появления греков, о математике Средней Азии до арабского завоевания и о математике древнего Закавказья мы не располагаем сведениями, но по остаткам этих древних цивилизаций можно судить о том, что они мало уступали Египту и Вавилону. То же относится и к древним Индокитаю и Индонезии и, может быть, в меньшей степени, к древним государствам Африки и Америки, наши сведения о культуре которых совершенно недостаточны.

Все государства, о которых мы здесь говорим, были государствами земледельческими. Площадь, пригодная для земледелия во всех этих странах, была невелика, ее можно было увеличить только путем проведения оросительных каналов или осушения болот. Работы по проведению каналов и осушению болот, необходимость установления границ между полями потребовали создания сельских общин. Поэтому наряду с натуральным хозяйством этих общин появляется распределение, связанное со значительными общественными работами, а также с частыми войнами, в которые вовлекаются большие массы людей. Организация централизованного государства приводит к появлению централизованной религии, вокруг дворцов правителей и храмов возникают города, которые становятся центрами торговли.

Именно в этих государствах появляются математические задачи, к которым приводит необходимость расчетов при проведении каналов, строительстве плотин, складов для зерна, дворцов, храмов и военных укреплений, при межевании земель, распределении материалов и продуктов среди участников общественных работ или военных походов, при торговых сделках, вождении торговых или военных караванов и мореплавании. Об этих задачах и говорят те математические документы, которые в том или ином виде сохранились до нашего времени. Тот факт, что от

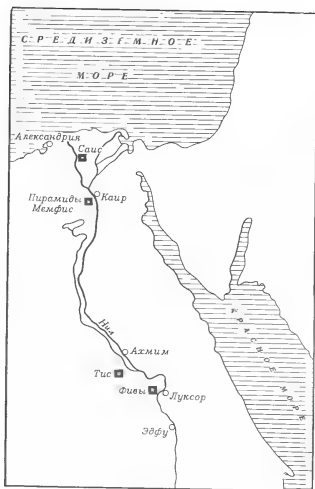
одних цивилизаций сохранилось относительно много математических документов, а от других такие документы сохранились в единичных случаях, не означает, что в одних государствах математика существовала, а в других нет. Математика несомненно имела во всех этих государствах, хотя, возможно, уровень ее в разных странах не был одинаковым. Именно так обстоит с Египтом и Вавилоном: в Египте математические тексты писались на хрупком папирусе, иногда на коже, и сохранились только те тексты, которые были положены в пирамиды — усыпальницы высокопоставленных египтян — для того, чтобы души покойников могли читать свои любимые произведения в загробном мире; вавилонские же тексты были написаны клинописью на сырой глине, которая затем обжигалась, и до нас дошло огромное число математических клинописных текстов. Существенное различие между имеющимися в нашем распоряжении египетскими и вавилонскими математическими текстами вынуждает рассматривать математику Египта и Вавилона отдельно. Мы начнем с египетской математики, о которой мы располагаем более бедными сведениями.

Древний Египет

Объединение Египта приписывается фараону Менесу (Мине), основавшему около 3000 г. до н. э. так называемое Раннее царство со столицей в верхнеегипетском городе Тисе. Около 2700 г. до н. э. продолжавшаяся несколько столетий борьба между Верхним и Нижним Египтом заканчивается победой последнего и возникает Древнее царство со столицей в нижнеегипетском городе Мемфисе (Меннефер), вблизи нынешнего Каира. Наиболее известными фараонами этой эпохи были Хеопс (Хуфу) и Хефрен (Хафра), построившие наиболее крупные пирамиды. Около 2000 г. до н. э. начинается новая эпоха истории Египта, называемая Средним царством, столицей Египта становится снова верхнеегипетский город Фивы (Уасет), вблизи нынешнего Луксора (ал-уксур — «дворцы»). Эпоха Среднего царства продолжается около двухсот лет. В конце этой эпохи север Египта подвергается нашествию варваров — гиксосов, пришедших из степей Аравии. С изгнанием гиксосов начинается Новое царство, столицей которого остаются Фивы. Наиболее известными фараонами этой эпохи были Тутмос I, завоевавший земли до Евфрата, и Рамсес II (1317—1251 до н. э.), воевавший с хеттами в Сирии. В 670 г. до н. э. Египет завоевывает ассирийский царь Асархаддон, в 655 г. до н. э. Псамметих I изгоняет ассирийцев и основывает последнее самостоятельное древнеегипетское царство со столицей в Саисе в дельте Нила; в это время Мемфис вновь возвышается как религиозный центр. В 525 г. до н. э. Египет захватывается персидским царем Камбизом, а в 332 г. до н. э. — Александром Македонским, основавшим в устье Нила Александрию, которая после смерти Александра становится столицей эллинистического государства Птолемеев.

Источники

Большинство математических текстов, сохранившихся в памятниках древнего Египта, написаны на папирусе — бумаге, выделанной из стебля одноименного растения (от слова «папирус» произошли названия бумаги *Papier*, *papier*, *paper* на немецком, французском и английском языках).



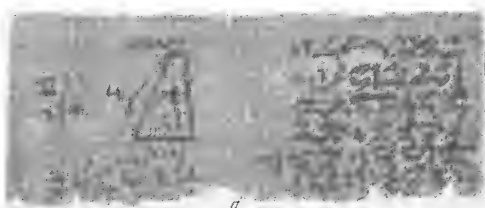
Древний Египет

В эпоху Древнего царства египтяне писали при помощи иероглифов (от греческих слов *hierós* — священный, *γλυφή* — резьба) — рисуночного письма, в котором каждый рисунок изображал слово или слог. В эпоху Среднего царства иероглифическое письмо было заменено более простым иератическим письмом, где от каждого иероглифа осталось несколько характерных штрихов, а иероглифы применялись только в особо торжественных случаях. И, наконец, в эпоху Нового царства возникает скорописное демотическое письмо (от греческого *δῆμος* — народ).

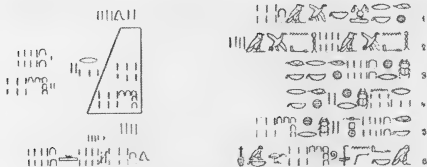
Самый большой, сохранившийся до наших дней древнеегипетский математический текст — это так называемый папирус Райнда размером $5,25 \text{ м} \times 33 \text{ см}$, содержащий 84 задачи. Названный по имени владельца, приобретенного папирус в 1858 г., он ныне хранится частично в лондонском Британском музее, частично в Нью-Йорке. Другой папирус примерно такой же длины, но гораздо более узкий ($5,44 \text{ м} \times 8 \text{ см}$), приобретенный в конце прошлого века русским востоковедом В. С. Голенищевым, принадлежит московскому Музею изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Этот свиток содержит 25 задач. Оба папируса переведены на современные языки и прокомментированы. Папирус Райнда был изучен в прошлом веке сначала его издателем А. Эйзендором, а затем В. В. Бобыниным. В 20-х годах нашего столетия он был переведен Т. Питом, а также

А. Б. Чейсом и другими учеными. Московский папирус исследовали Б. А. Тураев и его ученик В. В. Струве, которому главным образом мы обязаны изданием этого текста. Эти два текста — важнейшие, хотя и не единственные. Оба папируса относятся примерно к одному времени — эпохе Среднего царства. Египетская культура в ту пору достигла уже высокого материального и духовного расцвета. Носителями научных знаний были так называемые писцы — чиновники, состоявшие на государственной или храмовой службе. Служилая интеллигенция, гордившаяся своей образованностью (сам фараон был титулован «писцом божьей книги»), выполняла в древнем обществе различные административно-хозяйственные функции. В папирусах XX—XIX вв. до н. э. зафиксированы должности писца дома документов, войска, царских работ, надзирателя писцов, начальника сокровищницы и т. д. — самый широкий диапазон от старшего военачальника или великого искусством врачевания «царского писца» до «писца пастбищ пестрого скота». «Писец — он руководит всеми, и не обложена палогам работа в письме. На нее нет налогов. Заметь себе это», —

Фрагмент Московского папируса (а) и перевод этого фрагмента, написанного демотическим письмом, на иероглифическую запись (б)
(Москва, Музей изобразительных искусств им. А. С. Пушкина)



а



б

говорится в одном из многих текстов, восхваляющих привилегированное положение писца в древнем Египте и агитирующих за эту профессию. «Это больше, чем любая должность, и нет [ничего] равного им в стране этой», — читаем мы в одном из папирусов. Писцы обучались в специальных школах. Имелись и высшие писцовые школы, имевшие торжественное название «дома жизни». Упомянутые выше математические папирусы были составлены для учебных целей. Московский папирус был переписан неким учеником во времена гиксосов (ок. 1800—1600 гг. до н. э.) с текста, относящегося примерно к 1900 г. до н. э. Папирус Райнда, в котором материал более систематизирован, был переписан писцом Ахмесом также при владычестве гиксосов, и, как сказано в нем, посвящен «совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию их тайн», — настолько ценились в древности математические знания. Автор оригинала также неизвестен; известно лишь, что папирус был написан во второй половине XIX в. до н. э.

Таким образом, основные сведения о древнеегипетской математике у нас относятся к одной эпохе, и мы не можем составить представление о развитии математики в данной цивилизации на протяжении ее истории.

У нас нет почти никаких известий о математических знаниях Раннего и Древнего царств. Сохранились только числовые записи да рисунки на каменных плитах и стенах, свидетельствующие, что художники умели изображать предметы в уменьшенном масштабе с помощью квадратных сеток. Однако, хотя подробности научного развития неизвестны, мы знаем, что на протяжении III тысячелетия до н. э. существовали развитая письменность, нумерация и метрология, на основании астрономических наблюдений был разработан календарь (год делили на 12 месяцев по 30 дней и в конце года добавляли еще 5 дней). Это было время строительства первых пирамид, которые древние греки относили к семи чудесам мира.

Остается также открытым вопрос, что происходило в области математики в эпоху Нового царства и позднее вплоть до ассирийского завоевания, саисского царства и персидского завоевания. В это время могли быть установлены контакты с наукой Вавилона и других стран Передней Азии, в частности Финикии, а также Крита. Знание этих контактов, вероятно, могло бы многое прояснить в вопросе о восточных корнях науки древней Греции. Однако никаких математических документов от этих времен не имеется. Не дошли они и от последующих столетий, отмеченных великодушным взлетом литературы и искусств (и теперь мы не можем без восхищения смотреть, например, на головку Нефертити), идеологической борьбой в области религии (попытка Аменхотепа IV, боровшегося со жречеством и знатью, заменить многобожие культом одного бога Солнца — Атона), прогрессом медицины, дальними морскими и сухопутными экспедициями, а в астрономии — появлением изображений звездных карт на потолках гробниц. Правда, полагают, судя по некоторым отрывкам, что математика мало изменилась с тех пор, как были составлены Московский папирус и папирус Райнда.

Дальнейшая история Египта, история I тысячелетия до нашей эры, — полоса упадка страны и господства иностранных завоевателей, сначала эфиопов, затем ассирийцев и персов. После завоеваний Египта Александром Македонским начинается процесс плодотворного синтеза греческой и египетской культур. Александрия становится крупнейшим центром науки наступающей эпохи эллинизма, и она сохраняет это значение еще долгие века спустя после завоевания Египта Римом (30 г. до н. э.).

Вновь с математическими работами египтян мы встречаемся в эпоху эллинизма и в период распространения ислама, но это уже совсем другая культура, другая и математика. Древнеегипетская цивилизация закончила свое существование.

Египетская нумерация

Египетская иероглифическая нумерация была чисто аддитивной: египтяне имели особые знаки только для единицы, десяти, ста, тысячи, десяти и ста тысяч, миллиона и десяти миллионов. В первых трех столбцах таблицы (стр. 22) указаны иероглифические, иератические и демотические цифры древних египтян.

Знак 1, очевидно, изображает мерную палку, знак для 10 — путы для стреноживания коров, знак для 100 — мерительную веревку для обмера полей, знак для 1000 — цветок лотоса, знак для 10 000 — указательный палец, знак для 100 000 — лягушку, знак для 1 000 000 — удивленного человека, знак для 10 000 000 — Солнце. При записи числа иероглифы единицы, десятка, сотни и т. д. писались столько раз, сколько в данном числе единиц в соответствующих разрядах, причем разряды записывались в порядке, обратном нашему (египтяне писали справа налево).

В заменившем первоначальное иероглифическое письмо более скорописном иератическом письме, которым и написаны дошедшие до нас математические папирусы, имеются уже особые знаки как для первых девяти чисел, так и для десятков, сотен и тысяч, выработавшиеся из иероглифических изображений этих чисел.

Кроме обозначений целых чисел, египтяне имели также специальные обозначения для дробей вида $1/n$ и дроби $\frac{2}{3}$; дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ обозначались специальными иероглифами, а основные дроби вида $1/n$ обозначались знаком числа n , над которым ставился знак $\circ$ (рот—«часть»).

Математические знания египтян

Какой была математика древних египтян? Она кажется нам теперь довольно примитивной, ведь египтяне не пошли дальше арифметики дробей, уравнений первой степени и неполного квадратного уравнения. Дело, однако, в том, что и египетские дроби — это не дроби в нашем понимании, и уравнения — это совсем не наши уравнения, такого понятия тогда не было. Древний ученый шел непроторенными путями, и в круте тех понятий и проблем его ум работал не менее интенсивно, чем теперь ум математика над той или иной нерешенной современной задачей.

Математические знания египетского писца позволяли ему производить расчеты при строительных работах, сборе налогов, разделе имущества, обмене и распределении продуктов (денег в древнем Египте не было), измерении площадей полей и объемов плотин и зернохранилищ, переводе мер веса или емкости в другие единицы и т. п. Основное внимание в египетских текстах сконцентрировано не на методах решения задач, а на самих вычислениях. И сами методы часто зависят от тех вычислительных трудностей, которые встают перед решающим задачу. Задачи в подавляющем большинстве еще совсем не абстрагированы и не обобщены.

Конечно, изложение математики, письменное или устное, предполагает некоторую систематизацию материала. Ее мы находим в папирусе

	Египетские			Ассиро- Вави- лонские	Фини- кийские	Сирий- ские	Пальмир- ские	Греческие Героди- даны	Римские
	Иеро- глифы	Иерати- ческие	Демоти- ческие						
1	Ⲁ	ⲁ	Ⲃ	ⲁ	ⲁ	ⲁ	ⲁ	ⲁ	ⲁ
2	ⲀⲀ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
3	ⲀⲀⲀ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
4	ⲀⲀⲀⲀ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
5	ⲀⲀⲀⲀ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
6	ⲀⲀⲀⲀ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
7	ⲀⲀⲀⲀ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
8	ⲀⲀⲀⲀ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
9	ⲀⲀⲀⲀ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
10	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
11	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
15	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
20	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
30	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
40	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
50	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
60	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
70	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
80	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
90	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
100	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
200	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
400	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
500	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
1000	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
10000	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
10 ⁵	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
10 ⁶	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ
10 ⁷	Ⲁ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ	Ⲃ

Числовые знаки разных народов

Райнда. Классификация задач производилась не по методам (например, задачи на пропорции, линейные уравнения и т. д.), а по темам. Задачи на припек можно объединить в один класс, задачи о емкости зернохранилищ и сосудов — в другой и т. д. При этом фактически определялась математическая суть данной группы, а значит, единый метод решения, хотя он не был сформулирован общим образом. Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений, в числах. Однако при решении вычислитель пользуется некоторыми общими законами. Так, решение первой группы задач основано на пропорциональной зависимости, второй — на формулах объема тел и т. д. Иногда дается проверка найденного решения.

Для тренировки учащихся составлялись задачи развлекательного характера, не имевшие прямого практического применения, либо только имевшие вид практических. Наиболее яркой из них, пожалуй, была задача на геометрическую прогрессию, — замечательная своей историей «задача-путешественника». В дальнейшем она с небольшими модификациями не раз встречалась в разные эпохи и у разных народов:

«Лестница	дом	7		
	кошка	49	1	2 801
	мышь	343	2	5 602
	ячмень	2401	4	11 204
	мера	16 807	вместе 19 607	

Как видно, в задаче речь идет о 7 кошках в каждом из 7 домов; каждая кошка съела по 7 мышей, из которых каждая съела по 7 колосьев ячменя; каждый же колос мог дать 7 мер хлеба. Сумма домов, кошек, мышей, колосьев и мер хлеба находится путем умножения

$$2801 \cdot 7 = 2801 \cdot (1 + 2 + 4)$$

(о египетском способе умножения см. стр. 24). Существует несколько гипотез о том, как именно было получено данное решение. Всякий раз при разборе древних решений исследователю приходится разгадывать, как оно было получено; согласно О. Нейгебауэру, в этом случае вычисления соответствовало схеме:

1	1	7	49	343	2 401	2 801
2	2	14	98	686	4 802	5 602
4	4	28	196	1372	9 604	11 204
Вместе	7	7	49	343	2401	16 807
						19 607

Искусство счета

Счет у египтян был по своей идее очень прост. Он состоял из умения складывать, удваивать, дополнять дроби до единицы. Египетская арифметика покоилась на этих основных процедурах.

Мы видели, что аддитивной была сама система счисления. В такой системе счисления сложение в принципе возможно без знания паизусть

таблицы сложения, достаточно механически присчитывать единицы и уметь переходить из разряда в разряд, т. е. укрупнять или раздроблять единицы разрядов числа. Впрочем, вряд ли можно сомневаться, что египетский математик знал таблицы сложения. Техника сложения и вычитания в папирусах не описана.

Умножение на целое число и деление без остатка производились с помощью удвоения, т. е. однократного сложения числа с самим собой. Для этого множитель представляли как сумму тех или иных членов последовательности 1, 2, 4, 8, 16, ..., что всегда возможно.

У египетского писца не было в распоряжении правил для умножения и деления чисел, подобных нашим, не было таблицы умножения до 9·9. Удвоение — простейший случай умножения, но ограничение им влекло за собой громоздкость умножения и деления даже в пределах области целых чисел, не говоря уже о дробях. Приведем в наших цифрах схему умножения 12×12 из задачи № 32 папируса Райнда, где множитель представлен в виде степеней двойки (колонка слева):

1	12
2	24
/4	48
/8	96
Сумма	144

Дальше удваивать не нужно, так как среди степеней двойки есть уже необходимые слагаемые множителя, они отмечались косой чертой. Заметим, что в подлиннике запись идет справа налево, т. е. на схеме у нас, по существу, зеркальное отображение от вертикали. Следует добавить, что особо выделялись еще умножение на 10 и 5, т. е. учитывались свойства десятичной системы.

Деление производилось как действие, обратное умножению. В задаче № 69 папируса Райнда, где делится $1120 : 80$, указание гласит: «Умножай 80 (буквально: складывая, начиная с 80), пока не получишь 1120».

1	80
10	800
2	160
/4	320
	1120

Таким образом, непосредственно «пробуется», сколько раз делитель содержится в делимом. Частное складывается из чисел, соответствующих слагаемым делителя, отмеченным черточкой.

Наряду с удвоением при делении употреблялось раздвоение. Например, для вычисления $2 : 8$ пользовались схемой

1	8
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2

С возведением в степень и извлечением корня древнеегипетский вычислитель имел дело при нахождении площади квадрата и объема куба или стороны квадрата по его площади. Однако он не умел выделять эти действия, специальной терминологии еще не существовало. При вычис-

лении $2^2 = 4$ в Московском папирусе говорилось: «Сделай эти 2 в про-
хождении, получится 4». Имелось в виду, вероятно, нечто подобное ква-
дрированию поля. А при извлечении $\sqrt[3]{100} = 10$, как полагают, мысллась
процедура, обратная этой: «Сделай его угол» (уверенности в точности этого
перевода нет).

Египетские дроби

Самым трудным был случай нецелого деления. Общими рациональ-
ными дробями вида m/n египтяне не оперировали. Это не значит, что они
не имели вообще представления о таких дробях, хотя, разумеется, тепереш-
нее определение дроби как пары целых чисел (m, n) было им чуждо; впрочем,
удовлетворительные с нашей точки зрения определения этого понятия
появляются только в XIX в. Представления, равносильные идее общей
дроби, у египтян, во всяком случае, имелись, ибо они умели по-своему
выражать частные вида $m:n$. Для этого им служили аликвотные дроби —
доли единицы вида $1/n$, которые мы, как это принято у историков матема-
тики, будем записывать в виде $\bar{n}$ (черточка символизирует египетский
знак $\circ$). Деление $m:n$ египтяне иногда представляли как умножение
 $m \cdot \bar{n}$; в этом, быть может, сказалось влияние математики вавилонян, ко-
торые всегда приводили деление на целое число к умножению на обрат-
ную ему дробь.

Кроме дробей вида $\bar{n}$, египтяне оперировали еще дробью $2/3$,
для которой имелся свой знак 𐀓 ; мы будем обозначать ее $\frac{2}{3}$.

Появление класса аликвотных дробей весьма характерно для началь-
ного развития понятия числа в любой древней цивилизации. Это первое
появление дробей из процесса дробления целого на части (другой источ-
ник возникновения дробей — процесс измерения), если не считать «на-
туральных» дробей типа $1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$, $3/4$, $1/6$ и $1/8$, которые имели
индивидуальные названия (это были доли египетской единицы площади
«сетат»). Эти натуральные дроби возникли одновременно с целыми также
из процесса деления целого на более или менее крупные части. Деление
же единицы на большое число в практике вряд ли встречалось, но выпол-
нялось в задачах вычислителями «теоретически», при мысленном дроб-
лении.

Аликвотные дроби типа $1/n$ являются первыми алгоритмическими
дробями. Дальнейший этап развития рационального числа — это упот-
ребление этих долей как m целых чисел, т. е. интерпретация дроби m/n
как целого именованного числа. Однако в древнеегипетской математике
далее этих основных дробей, получивших название египетских, развитие
не пошло.

Тем самым в вычислительной технике древнего Египта появилась те-
оретико-числовая задача о разложении дробей на сумму аликвотных.
Задача, не имеющая единственного решения, решалась египтянами эм-
пирически, в несколько этапов. Она сводилась к составлению таблицы
канонических разложений для дробей $2/n$, поскольку при делении основ-
ной операцией было удвоение. С такой таблицы начинается папирус
Райнда. Разложения с $n=3$ до $n=101$ скрывают в себе, подобно молча-
ливому сфинксу, секрет их составления. Над разрешением этой египет-
ской загадки работали многие ученые; мы будем придерживаться хода
рассуждений Б. Л. ван дер Вардена.

Самые простые разложения писцы должны были знать наизусть, они встречались на каждом шагу, и к ним привыкли. В текстах они употребляются без особых разъяснений:

$$\bar{6} + \bar{6} = \bar{3},$$

$$\bar{6} + \bar{6} + \bar{6} = \bar{2},$$

$$\bar{3} + \bar{3} = \bar{3},$$

$$\bar{3} + \bar{6} = \bar{2},$$

(1)

$$\bar{2} + \bar{3} + \bar{6} = 1.$$

(2)

Все это простейшие дроби, операции с которыми были так же хорошо известны, как операции с целыми числами. Отсюда простыми комбинациями могли вывести такие соотношения:

$$\bar{3} = \bar{2} + \bar{6},$$

(3)

$$\bar{2} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{6},$$

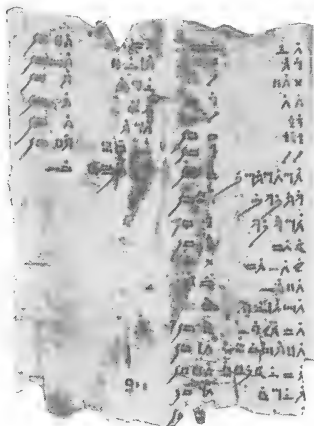
(4)

$$\bar{3} + \bar{2} = 1 + \bar{6}.$$

(5)

Как свидетельствуют задачи, которые содержатся в кожаном свитке, хранящемся в Лондоне и относящемся примерно к XVIII—XIX вв. до

Кожаный свиток Британского музея
(R. K. Glanville. The mathematical leather roll
in the British museum. The Journal of Egyptian
Archeology, 1927, t. 13, p. 232)



п. э., выражения (1) — (5) делятся на 2, 3, 4, и получается еще серия разложений:

$$\bar{6} + \bar{12} = \bar{4},$$

$$\bar{9} + \bar{18} = \bar{6},$$

$$\bar{12} + \bar{24} = \bar{8}$$

и т. п. Очень важно правило (3), которое фактически представляет начало создания таблицы канонических разложений при удвоении дробей:

$$\bar{3} + \bar{3} = \bar{2} + \bar{6} \text{ (то же, что (3))},$$

$$\bar{9} + \bar{9} = \bar{6} + \bar{18} \text{ (разделено на 3)},$$

$$\bar{15} + \bar{15} = \bar{10} + \bar{30} \text{ (разделено на 5)}$$

и т. п. Ясно, что в таблице должны содержаться разложения только для четных n , так как при удвоении дроби $1/2k$ она дает просто $1/k$. Далее, при удвоении дробей вида $1/3k$ можно пользоваться разложением

$$2 \cdot \bar{3k} = \bar{3k} = (\bar{2} + \bar{6}) \bar{k} = \bar{2k} + \bar{6k}.$$

Эта часть таблицы, как признают все исследователи, самая древняя. Остается понять главное: общий случай разложения дроби на основные. Оказывается, надо просто делить 2 на n . Для нас такой вывод тривиален, для древнеегипетского вычислителя он был гениальной догадкой. Вычислитель поступает так в своей таблице начиная с $n = 11$. При этом деление 2 на 5, 9, 11, 17, 23, 29 производится при помощи ряда дробей, начинающихся с последовательности $\bar{3}$ (ведь дробь $2/3$ была натуральной, традиционной), а на 7, 13 — с последовательности $\bar{2}$.

Красные числа

В дальнейшем, начиная с $n = 31$, когда вычисления усложняются, прибегают к другому методу — методу так называемых красных вспомогательных чисел. Они представляют собой при известной модернизации дополнительные множители, подобные тем, которыми мы пользуемся при приведении дробей к общему знаменателю. Но от современных дополнительных множителей они отличаются принципиально. Дело в том, что красные числа могут быть не только целыми, но и дробными. Получается это оттого, что здесь общим знаменателем является не наименьшее общее кратное — этого понятия еще не существовало, — а просто в большинстве случаев наибольший из знаменателей данных дробей. Все остальные дроби выражаются через эту наименьшую дробь, «измеряются» некоторой минимальной мерой, которая не всегда может целое число раз уложиться в заданных величинах. Эта процедура нужна была в тех сложных случаях деления 2 на 31, ..., когда, по египетскому способу, получив 1 с некоторой дробью, требовалось оценить, сколько же еще не хватает до 2. Таким образом, выделялась самостоятельная вычислительная задача дополнения некоторой суммы дробей до 1. Такие задачи специально разобраны в папирусе Райнда.

Приведем один пример. Схема деления 37 на $1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7}$ в задаче 33 папируса Райнда такова:

$$\begin{array}{l} 1 \quad 1 + \bar{3} + \bar{2} + \bar{7} \\ 2 \quad 4 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28} \text{ (так как } 2 \cdot \bar{7} = \bar{4} + \bar{28}) \\ 4 \quad 9 + \bar{6} + \bar{14} \text{ (так как } \bar{3} = \bar{2} + \bar{6}) \\ 8 \quad 18 + \bar{3} + \bar{7} \\ 16 \quad 36 + \bar{3} + \bar{4} + \bar{28} \end{array}$$

Удвоение приводит почти к результату. Теперь надо найти, сколько недостает дроби $\bar{3} + \bar{4} + \bar{28}$ до единицы и, кроме того, выразить в каких-то других «универсальных» единицах эту недостачу и делитель, чтобы можно было сравнить их. Здесь такой единицей является дробь $\bar{42}$, а не $\bar{28}$, потому что главная цель красных чисел — дать в сумме целое число. Остаток в новых единицах, т. е. долях $\bar{42}$:

$$\begin{array}{r} 1 \\ / \bar{3} \\ \bar{2} \\ / \bar{4} \\ / \bar{28} \end{array} \begin{array}{r} 42 \\ 28 \\ 21 \\ 10 \\ 1 \end{array} \begin{array}{r} \\ \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{array}$$

Итак, красные числа (они набраны курсивом) $28 + 10 + \bar{2} + 1 + \bar{2}$ в сумме дают 40. Значит, до единицы не хватает двух $\bar{42}$. Делитель же в новых единицах складывается из

$$\begin{array}{r} 1 \\ \bar{3} \\ \bar{2} \\ \bar{7} \end{array} \begin{array}{r} 42 \\ 28 \\ 21 \\ 6 \end{array}$$

т. е. равен 97 этих новых единиц. Следовательно, в нашей первой схеме удвоенный к частному 16 надо еще прибавить $2 \cdot \bar{97}$, что по таблице канонических разложений представляется суммой $\bar{56} + \bar{679} + \bar{767}$. Тогда в правой части схемы будет число 37, которому в левой части будет соответствовать частное, равное $16 + \bar{56} + \bar{679} + \bar{776}$. Это и есть ответ.

Мы видим, что при решении вычислительных задач понятие числа развивалось. Приведение дробей к общему знаменателю проводилось на том уровне, когда операции ограничивались областью целых чисел, аликвотных дробей и дроби $2/3$. Но разработка самой процедуры приведения требовала перевода одних долей в другие и тем самым раздвигала границы числового понятия. Дробь понимается здесь как мера, как именованное число: «столько-то таких-то». Задачи на перевод одних мер в другие решались специально — требовалось переводить объем и вес в другие единицы. Однако это обобщение не привело еще к выделению более общего понятия дроби. Вместе с тем поражает искусство, с каким владел древнеегипетский вычислитель всей описанной техникой операций.

Задачи на «аха»

Разобранная только что задача № 33 из папируса Райнда представляет собой частный случай так называемых задач на «аха» (или, как раньше писали, «хау»). С современной точки зрения, в них решаются уравнения первой степени вида

$$x + ax + bx + cx + \dots = p,$$

откуда

$$x = \frac{p}{1 + a + b + c + \dots}$$

(такое деление и было рассмотрено выше). Несомненно, что задачи этого рода соответствуют нашим линейным уравнениям с одним неизвестным. Само слово «аха» означает «кучу», «грудку» — здесь в смысле количества, и, конечно, это количество есть неизвестная, которую требуется найти. Однако, как ни просты эти задачи, существуют различные толкования их решения. Скорее всего, египтяне пользовались приемом, который много позднее в Европе Средних веков получил название способа ложного положения.

Например, условие задачи № 26 в папирусе Райнда гласит: «Количество и его четвертая часть дадут вместе 15» (мы бы записали: $x + \frac{1}{4}x = 15$), а решение начинается словами: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, имеют 1; вместе 5». После того вычисляются $15 : 5 = 3$ и $4 \cdot 3 = 12$. Естественно понимать дело так. Вычислитель принимает, что количество есть 4, тогда прибавление четверти количества дает 5, а должно быть втрое больше ($15 : 5 = 3$); поэтому искомое количество также должно быть втрое больше принятого ($4 \cdot 3 = 12$). Вообще, если «ложное положение» есть x_1 и оно дает p_1 вместо p , то

$$x : x_1 = p : p_1, \quad x = x_1 \cdot \frac{p}{p_1}.$$

Такие общие рассуждения и пропорции в папирусах не встречаются, но идея пропорциональности, на которой основано правило ложного положения, была очень простой и доступной и, кроме того, широко распространённой в древности. Если, как в задаче № 33, количество полагают сначала равным $x_1 = 1$, то $x = p/p_1$ и дело сводится просто к делению.

С помощью метода ложного положения египтяне решали также задачи, которые можно выразить двучленным квадратным уравнением $ax^2 = b$. Такова, например, задача № 6 Московского папируса, в условии которой сообщается, что $3/4$ длины являются шириной, а площадь равна 12 и требуется определить стороны прямоугольника. Судя по порядку действий, решение основано на пропорциональной зависимости между квадратом предположенного значения длины, равной 1, и площадью, равной в таком случае $3/4$, а также квадратом истинной длины x и истинной заданной площадью 12:

$$1^2 : x^2 = \frac{3}{4} : 12.$$

Отсюда

$$x^2 = 12 \cdot \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}}.$$

В египетском решении прежде всего вычисляется $1 : \frac{3}{4} = 1 \frac{1}{3}$. Далее находится произведение $12 \cdot 1 \frac{1}{3} = 16$ и $\sqrt{16} = 4$. Наконец, ширина есть $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. Правда, имеются и другие истолкования этого решения.

В группе задач на «аха», первых в истории математики отвлеченных задачах, решенных единым методом, мы видим зачатки алгебры как науки о решении уравнений.

Прогрессии

Особенно следует упомянуть случаи арифметических прогрессий в папирусе Райнда. Их мы находим в задаче: «Наставление, как определять разности. Тебе сказано: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между каждым человеком и следующим за ним составляет $\frac{1}{8}$ меры». Здесь количество хлеба составляет арифметическую прогрессию из 10 членов с разностью $\frac{1}{8}$. Автор находит, что 10-й член прогрессии равен

$$1 + 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = 1 \frac{1}{2} + \frac{1}{16}.$$

Мы уже упоминали задачу о домах, кошках, мышах и т. д., представлявшую собой задачу на геометрическую прогрессию.

Геометрические знания

Геометрические знания египтян относятся к измерению площадей и объемов. Некоторые найденные при этом результаты были замечательными, но в отдельную отрасль математики геометрия еще не превратилась.

Площади прямоугольников, треугольников и трапеций вычислялись по точным правилам, площадь произвольного четырехугольника — по приближенному правилу, как произведение полусумм пар противоположных сторон a , c и b , d , т. е.

$$S = \frac{a+c}{2} \frac{b+d}{2}.$$

Этот прием распространялся и на треугольники при $d = 0$. Все такие задачи возникли из практики землемерия. Не было термина «сторона» фигуры и самого термина «фигура» — говорили о поле, об участке с границами или с «шириной» и «длиной». Мы увидим, что такого рода терминология одинаково свойственна древним задачам как египтян, так и других народов. Возникает вопрос, почему пользовались только что приведенным правилом для площади произвольного четырехугольника, погрешность которого в общем случае может быть весьма и даже сколь угодно велика? Ведь всякий четырехугольник можно разбить на правильные треугольники и трапеции. Здесь мы встречаемся с «математической практикой» в ее начальной форме. Вероятно, на деле это правило применялось к участкам, которые по форме своей близки к прямоугольнику. В надпи-

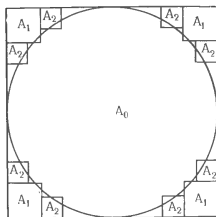


Рис. 1

сях на стенах храма Гора в Эдфу в перечне пожертвований по этому правилу подсчитаны размеры земельных участков, например: «22 на 23; 4 на 4; это равно 90». И треугольные площади в этом случае имели форму, при которой землемеры могли употреблять неверное правило без существенной ошибки. Сознали ли эти землемеры, что правило только приближенное, это уже другой вопрос, на который мы не можем ответить.

Необходимо указать еще, что широко распространенное мнение о знакомстве древних египтян с так называемой теоремой Пифагора не опирается на какие-либо египетские тексты. В них нигде нет указаний ни на общую теорему Пифагора, ни на частные случаи треугольников, для сторон которых $a^2 + b^2 = c^2$. Правда, греческие ученые, побывавшие в Египте, сообщают, что для построения прямого угла употреблялась веревка, разделенная на 12 равных частей; с этой целью концы веревки связывались и она натягивалась в виде (прямоугольного) треугольника со сторонами 3 : 4 : 5. Но эти свидетельства относятся уже к середине I тысячелетия до н. э. Между тем, как мы увидим, теорема Пифагора была известна задолго до того в древнем Вавилоне.

Вычисление площади круга

При вычислении площади круга египтяне пользовались довольно хорошим приближением, полагая ее равной квадрату со стороной в $8/9$ диаметра:

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Этому правилу, содержащемуся в задаче № 50 папируса Райнда, отвечает значение $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3,1605$, погрешность которого менее 1%. Метод получения правила неизвестен. Очень правдоподобна гипотеза А. Е. Раик о последовательности паложения квадратных сеток. Предполагается, что площадь круга диаметра d сравнивается с площадью описанного квадрата, из которого удалялись малые квадратики со сторонами $\frac{1}{6}d$, $\frac{1}{9}d$ (рис. 1). В наших обозначениях вычисления таковы.

Первое приближение:

$$S = d^2 - 4\left(\frac{1}{6}\right)^2 d^2 = d^2 \left(1 - \frac{1}{9}\right).$$

Второе приближение:

$$\begin{aligned} S &= d^2 \left(1 - \frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2 d^2 = d^2 \left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right) d^2 = \\ &= d^2 \left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{9}\right) d^2 = \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right) d\right] \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right) d\right]. \end{aligned}$$

Именно так формулируется египетское правило вычисления площади круга. В пользу этой гипотезы свидетельствуют аналогичные вычисления в задаче Московского папируса, где предлагается сосчитать $\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{9}\right)$.

Объем пирамиды

Египтяне вычисляли объемы многих тел: куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра — как произведение площади основания на высоту. Следует отметить, что такие расчеты производились в задачах на обмер зерна в амбарах, имеющих эти формы, и главное внимание уделялось переводу мер емкости сыпучих тел в геометрические меры объема и обратно.

Самым удивительным в геометрии египтян было правило для определения объема усеченной пирамиды, которое можно выразить формулой

$$V = (a^2 + ab + b^2) \frac{h}{3},$$

где a и b — стороны квадратных оснований пирамиды, h — высота ее (в тексте $a = 4$, $b = 2$, $h = 6$). Многие полагают, что при выводе этой формулы египтяне представляли пирамиду с одним перпендикулярным основанием ребром. Вероятно, пирамида разбивалась на части, указанные на рис. 2. Тогда она составляется из четырех пирамид

$$V = \frac{1}{3} a^2 h + \frac{1}{3} b^2 h + 2 \cdot \frac{1}{3} b \left(a \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{3} h (a^2 + b^2 + ab).$$

Существуют и другие реконструкции, но, во всяком случае, нельзя представить себе, что этот результат был получен без геометрических и арифметических рассуждений. Что касается объема четырехгранной пирамиды, то он мог быть получен эмпирически. Возможно, что правило, которое нетрудно установить для угловой пирамиды в кубе, было распространено на остальные случаи.

Интерес к вычислению объема пирамиды и усеченной пирамиды был совершенно естественным в Египте. В этой связи заметим, что египетские строители умели математически охарактеризовать угол наклона α боковой грани к квадратному основанию пирамиды числом локтей, на которое высота, опущенная из вершины пирамиды на сторону основания, отходит от вертикали при подъеме на один локоть. В сущности, они имели дело при этом с отношением высоты пирамиды к половине стороны основания, т. е. с $\operatorname{ctg} \alpha$.

Загадочной является упомянутая выше задача № 10 Московского папируса, где вычисляется поверхность корзины «с отверстием $4 \frac{1}{2}$ ». Текст ясен, а может быть, и непонят. В. В. Струве усмотрел в нем совершенно

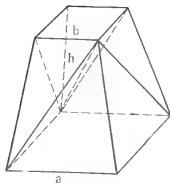


Рис. 2

точное правило вычисления поверхности полушара, Т. Пит — боковой поверхности цилиндра, а О. Нейгебауер — приближенное вычисление куполообразного амбара для хранения зерна. Как бы то ни было, и в этой задаче нашему числу π соответствует уже упоминавшееся значение $4 \left(\frac{8}{9}\right)^2$.

Значение математики древнего Египта

Как мы видели, в древнем Египте математика представляла собой совокупность знаний, еще не расчленившуюся на арифметику, алгебру, геометрию и выступающую прежде всего как собрание правил для численного решения простейших арифметических, алгебраических и геометрических задач. Проблемы, стоявшие перед египетскими писцами, были главным образом практические. Многие решения находили путем проб, ощупью, эмпирически, и не удивительно, что они оказывались иногда громоздкими и требовали преодоления больших трудностей, которые не встретились бы на другом пути (примером могут служить операции с дробями). Но наряду с этим еще в начале II тысячелетия до н. э. шла интенсивная работа творческой мысли, задачи обобщались и начинали принимать более абстрактный характер. При исследовании отдельных проблем вырабатываются приемы геометрических и арифметико-алгебраических преобразований, которые, как и проверка решений, уже предвещали дальнейший рост этих составных частей математической дедукции. Догматическая манера изложения и обучения не могла полностью сорвать эти первые ростки идеи математического доказательства. Эти ростки, как мы увидим, еще более отчетливо видны в математике древнего Вавилона.

Математика древнего Египта оказала несомненное влияние на последующие судьбы науки. Сами греки рассказывали, что многие начальные сведения приобретены ими во время поездок в Египет. В этих рассказах много легенд, но в основе своей они сообщали правду. Когда Прокл писал в V в., что «согласно большинству мнений, геометрия была впервые открыта в Египте, имела свое происхождение в измерении площадей»¹, он лишь следовал ученым VI—V вв. до н. э.

¹ Proclus Diadochus. In primum Euclidis Elementorum commentarii. Ed. C. Friedlein, Leipzig, 1873, p. 64.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА

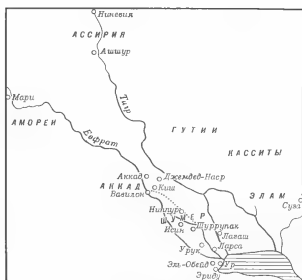
БАВИЛОН

Древнее Двуречье

Мы называем культуру древнего Двуречья, образованного Тигром и Евфратом, вавилонской по имени одного из крупнейших городов этой области. Двуречье называют также Месопотамией (от греческих слов *меѳос* — средний, *потамѳс* — река, т. е. Междуречьем). Однако первоначально эта культура возникла не в Вавилоне, а значительно южнее, на берегу Персидского залива. На речных наносных почвах дельты Тигра и Евфрата, постепенно отеснивших берег залива на юг, еще в IV тысячелетии до н. э. жили шумеры — народ с языком, непохожим на языки известных групп (для сравнения приведем шумерские числительные 1 — дшш, 2 — мин, 3 — эш). Здесь возникли шумерские города Ур, Урук (библейский Эрех), Лагаш и Ларса. Севернее жили семиты аккадiane (ср. их числительные 1 — иштен, 2 — шина, 3 — шалашу с арабскими, приведенными на стр. 11), главным городом которых был Аккад.

Основа культуры Двуречья была заложена шумерами. Именно шумеры изобрели клиношисное письмо, при котором буквы выдавливаются в виде нескольких клиньев деревянной палочкой на сырой глине, подвергаемой затем обжигу. Это письмо впоследствии было приспособлено к своим языкам вавилонянами, ассирийцами, хеттами, персами и предками армян — урарту. Шумеры пользовались шестидесятиричным счетом, который лег в основу вавилонской математики и отразился на нашем делении круга и счете времени. Шумерские зиккураты — «храмы неба», многоступенчатые сооружения на искусственных холмах, — были прототипами знаменитой Вавилонской башни. Шумерами впервые был применен и такой элемент архитектуры, как арка.

В XXIII в. до н. э. оба государства Двуречья были объединены аккадским царем Саргоном I; начиная с XXI в. до н. э. с востока и запада вторгаются многочисленные племена эламитов и аморитов. Вскоре шумеры как народ исчезают с политической сцены, и уже авторы библейских преданий не знают о его существовании; история шумеров была восстановлена только в новейшее время. В XIX—XVIII вв. до н. э. возвышается новое царство со столицей в Вавилоне, вблизи нынешнего Багдада, возглавляемое царями аморитянской династии. Ее наиболее выдающийся представитель Хаммурапи вновь полностью объединил в XVIII в. до н. э. всю Месопотамию и Сирию; особенно он прославился своим сводом законов. В последовавшей затем борьбе с иноземными нашествиями Вавилонское государство не раз испытало периоды упадка и подъема. При вавилонском царе Набонассаре (747—735 гг. до н. э.) начинаются регулярные астрономические наблюдения, сведения о которых сохранились до настоящего времени в передаче александрийских астрономов (эти наблюдения датируются «эрой Набонссара», начавшейся в 747 г. до н. э.).



Древнее Двуречье

В XVI в. до н. э. в верхнем течении Тигра возникает ассирийское царство с главными городами Асуром и Ниневией — столицей Нина и Семирамиды. В 729 г. до н. э. ассирийский царь Тиглатпилесар III захватывает Вавилон. Наибольшего расцвета ассирийская держава достигла при Асархаддоне (680—669 гг. до н. э.). В 538 г. до н. э. Вавилон и Ассирию захватывает персидский царь Кир, а в 336 г. до н. э. — Александр Македонский, после смерти которого Двуречье становится одной из областей эллинистического государства Селевкидов. Во II в. до н. э. Вавилон был мертвым городом и лежал в руинах, но вавилонская математика и особенно астрономия еще продолжали развиваться. К эпохе Селевкидов относятся некоторые важные тексты. Последние клинописные таблички дошли до нас от конца I в. до н. э.

Источники

Источниками для изучения математики Вавилона являются математические клинописные тексты, обнаруженные при археологических раскопках или найденные случайно местными жителями в развалинах старых сооружений. Среди разрозненного, распыленного по музеям мира множества глиняных табличек (зарегистрировано их около 500 000) самых разных эпох, от начала III тысячелетия до н. э. до I в. н. э., известно примерно 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами; имеются также в большом числе хозяйственные записи, многие из которых еще не прочитаны. Расшифровка и анализ клинописных текстов открыли неведомый до той поры мир математика древнего Двуречья, жившего четыре тысячелетия назад. Здесь особенно значительны заслуги О. Нейгебауера, работы которого, появившиеся в 30-е годы нашего столетия, породили бурный поток исследований в этой области. Публикации клинописных текстов по математике принадлежат также ассириологу Ф. Тюро-Данжену, позднее А. Саксу (совместно с О. Нейгебауером), Э. М. Брейису, А. А. Вайману и многим другим.

В древнем Двуречье, как и в Египте, общественными работами руководили писцы, занимавшиеся также учетом хозяйства, составлением торговых документов и деловой перепиской. Писцы были тесно связаны с храмами, в которых и хранились глиняные таблички с клинописными текстами. Как и в Египте, специальность писца была почетной: «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать, подобно солнцу». Нередко писцами становились сыновья правителей, ведь писцы относились к правящему классу. «Дом табличек» — так называлась школа или академия, где писцы обучались. «Писец должен был уметь писать понятно, хорошо знать математику, уметь межевать земли, примирять спорящих», — написано в послании одного ученика к другому.

Математические клинописные тексты, как и египетские, носят учебный характер и содержат в основном расчетные задачи; однако вавилонская вычислительная техника была гораздо более совершенна, а среди задач выделяется обширный класс алгебраических задач, которые выражаются системами линейных уравнений и уравнений второй степени. И хотя в клинописных текстах, как в египетских, нет доказательств, методы вычислений показывают, что их авторы знали и применяли законы алгебраических дробей и преобразований. В целом вавилонская математика в большей мере, чем египетская, приобретает знакомый нам вид самой абстрактной из наук, и внутренние потребности получают в ее развитии большее значение.

Вавилонская нумерация

В Вавилоне мы впервые встречаемся с последовательной позиционной нумерацией. Эта нумерация была построена на использовании только двух клинописных знаков ∇ и $<$, первый из которых обозначал 1 и 60, а второй — 10 и 600. Шумеры, впервые применившие шестидесятиричный счет, обозначали 60 и 600 клиньями большего размера, чем 1 и 10, но вавилоняне стали обозначать соответственные числа одинаковыми клиньями. При записи чисел от 1 до 59 знаки единицы и десяти записывались столько раз, сколько в данном числе единиц и десятков, причем разряды располагались в том же порядке, что и у нас. Числа, кратные 60, от 60 до 59·60 записывались точно так же, как соответственные множители от 1 до 59 слева от чисел, меньших 60. Вавилонские цифры изображены в четвертом столбце таблицы на стр. 22.

Впоследствии знак ∇ стал обозначать не только 1 и 60, но и 3600, и любые числа 60^n , а также $1/60$ и любые другие числа вида $1/60^n$. Знак $<$ стал обозначать не только 10 и 600, но и 36 000 и любые числа вида $10·60^n$, а также $1/6$ и любые другие числа вида $10/60^n$. Таким образом, вавилоняне пользовались шестидесятиричной системой счисления (сохранившей некоторые следы десятичной системы) и шестидесятиричными дробями.

В более позднее время вавилоняне ввели знак $\nearrow$, имеющий значение нуля, и, если $m - n > 1$, между числами, кратными 60^m и 60^n , вставлялось $m - n - 1$ таких знаков.

Вавилоняне обладали также специальными знаками для дробей $1/2$, $1/3$ и $2/3$.

Вавилонская нумерация весьма близка к первоначальной финикийской, где 1 и 10 обозначались знаками $/$ и $\nearrow$, близкими к вавилонским знакам

∩ и <. Финикийские цифры изображены в пятом столбце таблицы на стр. 22. Тот факт, что финикийский знак ∩ направлен в другую сторону, чем вавилонский знак <, объясняется тем, что финикийяне, как и египтяне, писали справа налево, а вавилоняне — слева направо. Кроме этих двух знаков, у финикийян был еще знак Н, означающий 20, и знак Р, означающий 100, причем последний знак не повторялся, а справа от него записывалось число сотен, т. е. знак Р применялся в соответствии с мультипликативным принципом.

Финикийские цифры, видимо, непосредственно происходят от счета на пальцах: знак / означает палец, знак ∩ — две руки, знак Н — человека с двумя руками и ногами. Знак Р, вероятно, появился позднее и происходит от какого-нибудь иероглифа.

По-видимому, вначале вавилоняне пользовались той же нумерацией, что и финикийяне, но впоследствии отказались от знака для 20 и стали придавать каждому знаку наряду с его старым числовым значением новое значение, отличавшееся от него в 60 раз. Возможно, что на одной из промежуточных стадий у вавилонян был специальный знак для 60, аналогичный финикийскому знаку для 100 и помещавшийся между шестидесятиричными разрядами, подобно финикийскому знаку Р.

В шестом и седьмом столбцах таблицы на стр. 22 изображены цифры, обнаруженные на таблицах, найденных при раскопках городов древней Сирии.

Вычислительная техника

И позиционный характер вавилонской нумерации и довольно большое ее основание, естественно, наложили печать на всю технику вычислений. Заметим, что в дальнейшем мы будем, как принято теперь, отделять целую часть числа, записанного в шестидесятиричной системе, точкой с запятой, а отдельные разряды — запятой; например:

$$2, 21; 12, 27 = 2 \cdot 60 + 21 + \frac{12}{60} + \frac{27}{60^2}.$$

Сложение и вычитание производили так же, как это делается в десятичной позиционной системе целых и дробей. Впрочем, имелось одно несущественное отличие, связанное с употреблением всего двух знаков — единицы и десяти. При сложении, например, помимо перехода от какого-либо шестидесятиричного разряда к ближайшему следующему (когда сумма единиц превосходит 59), бывало нужно и в пределах данного разряда переходить от одной десятки к следующей за ней (когда сумма единиц превосходит 9).

При умножении затруднение, связанное с большим основанием системы нумерации, преодолевалось с помощью специальных таблиц. Дело в том, что вавилоняне не пользовались одной таблицей умножения до 59·59, запомнить которую нелегко, так как она содержит 1770 элементов (в нашей десятичной таблице их всего 45). Для умножения, как и для деления, существовал обширный набор таблиц.

Прежде всего, имелись таблицы произведений чисел n , называемых теперь «заглавными», на числа $m=1, 2, 3, \dots, 19, 20, 30, 40, 50$ (здесь и далее мы отвлекаемся от разряда этих чисел совершенно так же, как это делается в наших таблицах). В принципе было бы достаточно взять в ка-

честве заглавных чисел те же m : это заменило бы таблицу умножения до 59·59. Можно было бы даже обойтись без множителей 11, 12, ..., 19. В самом деле, например, $37 \cdot 19 = (30 + 7)(10 + 9)$ и т. д. Но вавилоняне для своих вычислений разработали гораздо более обширный набор таблиц, и область заглавных чисел далеко выходит за пределы чисел m . Например, среди заглавных чисел имеются такие числа, как

1,15	2,15	12,30
1,20	2,24	16,40
1,30	3,45	36
1,40	7,30	45

а также такие «трехзначные» числа, как 2,13,20 или 44,26,40. Наличие заглавных чисел вроде $1,20 = 80$; $1,40 = 100$ или $16,40 = 1000$, встречающихся весьма часто, не удивительно. Но зачем включены были числа вроде 2,13,20, т. е. 8000, или 44,26,40, т. е. 16 000? Это объясняется тем, что таблицы умножения были тесно связаны с таблицами деления.

Операцию деления в вавилонской математике можно назвать проблемой № 1. Известный теперь каждому школьнику процесс поразрядного деления не был полностью известен в те далекие времена. Египтяне, как мы видели, пользовались при делении удвоением и сложением. Вавилоняне пошли по другому пути. Деление a на b они свели к умножению $c = ab$, и даже термина «делить» у них не существовало. Всякий раз они говорили так: возьми обратную от b , ты увидишь $\bar{b}$; умножь a на $\bar{b}$, ты увидишь c . Разумеется, вместо наших букв вавилонянин называл конкретные числа. Главное внимание, таким образом, было уделено составлению таблиц обратных величин.

Самые ранние и наиболее употребительные такие таблицы содержали обратные значения тех чисел от 2 до $1,21 = 81$, которые имеют вид $2^a 3^b 5^c$, и потому точно представимы шестидесятиричной дробью с конечным числом разрядов; мы будем называть числа такого вида правильными. Эти таблицы таковы:

Обратное 2 есть 30	Обратное 27	есть 2,13,20
» 3 » 20	» 30	» 2
» 4 » 15	» 32	» 1,52,30
» 6 » 10	» 36	» 1,40
» 8 » 7,30	» 40	» 1,30
» 25 » 2,24	» 1,21	» 44,26,20

Существовали и гораздо более обширные таблицы чисел, обратных правильным, составленные в эпоху Селевкидов (III в. до н. э.) — время бурного развития астрономии. Например, в одной таблице приведены обратные значения чисел $125 \cdot 2^n$, где $n = 0, 1, 2, \dots, 29$; при $n = 29$ числу 1,26,18,9,11,6,40 соответствует обратное значение 0; 0,0,0,0,0,41,42,49,22,21,12,39,22,30.

Как видно, в приведенной таблице встречаются оба трехзначных числа, которые включались в таблицы умножения. Вообще, таблицы деления и умножения так же взаимно обратны, как и сами эти операции. Если еще учесть, что числа записывались с точностью до множителя 60^{1n} , то каждая сторона таблицы могла служить для различных вычислений. На-

пример, «обратное 8 есть 7,30» можно понимать, как $\bar{8} = 0;7,30$ и вообще как $\bar{8} \cdot 60^{\pm n} = 0;7,30 \cdot 60^{\pm n}$, а так же как $\bar{7};\bar{30} = 0;8$ и вообще как $7;\bar{30} \cdot 60^{\pm n} = 0;8 \cdot 60^{\pm n}$.

Каждая из таблиц обратных величин довольно обширна. При их составлении сыграло существенную роль основание системы счисления $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. В пределах первого десятилетия встречается всего одно «неправильное» число 7, но уже во втором десятилетии их четыре: 11, 13, 17, 19, а всего до 60 их двадцать два. В более ранних таблицах обратных значений неправильные числа фигурируют обычно до 19, а в одной таблице, относящейся к середине III тысячелетия до н. э., даже до 59. В них против неправильных чисел стоит запись «обратного нет». Как производилось деление, когда делимое кратно неправильному делителю, не сообщается; быть может, частное находили подбором.

В более поздних таблицах даются приближенные значения для некоторых неправильных чисел, например для 7 значение 8,34,17,8,34,17, где дважды повторен период шестидесятиричного разложения этой дроби $\bar{7} = (8,34,17)$. Получивший такое приближение ученый должен был вплотную подойти к открытию периодических шестидесятиричных дробей. Однако клинописные таблицы ничего не сообщают о мыслях, которые могли возникнуть при таком вычислении. Иногда найденные приближения оценивали снизу и сверху; так, они знали, что 7 больше 0;8,34,16,59 и меньше 0;8,34,18. В одной древневавилонской таблице приведены обратные значения всех чисел от 56 до 80; здесь имеются приближения вроде 1,1,1 для 59 и 50,42,15 для $\bar{71}$, а всего 11 приближенных значений чисел, обратных неправильным. Деление на неправильное число производилось редко, его старались избегать, как обычно избегают неприятности. Оно встречается в основном при решении квадратных уравнений, возможно, потому, что основное внимание уделяли алгебре, а не счету, и не следили специально за тем, чтобы избежать деления на неправильные числа.

В распоряжении писцов были также таблицы обратных постоянных, применявшихся в хозяйственных расчетах. Так, например, приходилось иметь дело с различными характеристиками строительного материала, в особенности кирпичей, обожженных из сырца, 1-локтевых, 1/2-локтевых, 1/3-локтевых и т. д. В своих расчетах писец оперировал объемом не одного кирпича, а целого штабеля кирпичей. Пусть объем штабеля равен V_0 . Чтобы подсчитать количество кирпича, требуемого для задуманного сооружения, имеющего объем V , писец должен найти количество штабелей $N = V \cdot \frac{1}{V_0}$. Здесь требуется обратная постоянная $\gamma = 1/V_0$. Обратных постоянных было много. Найденны три таблицы, расшифровать которые полностью еще не удалось. В них указаны нормы посевного и урожайного зерна в расчете на единицу площади поля и норма настига шерсти с овцы и т. д.

Широкое применение различных таблиц — характерная особенность математики древнего Вавилона. Имелись таблицы степеней некоторых чисел до десятой включительно, пригодные одновременно для отыскания содержащихся в них корней; таблицы, ставящие в соответствие степени 2^n их показатели n (ими можно пользоваться в задачах на отдачу денег в рост); таблицы чисел вида $n^2 + n^3$, применявшихся в задачах, которые приводились к кубическому уравнению.

Арифметические задачи

Мы не будем подробно останавливаться на арифметических задачах, поскольку они не составляют характерной особенности вавилонской математики. Методы решения при этом опирались в основном на идеи пропорциональной зависимости и среднего арифметического. Даже задачи на раздел серебра между братьями в арифметической прогрессии решались на основе пропорциональной зависимости. Более развиты, чем у древних египтян, были представления об арифметической и геометрической прогрессиях.

Вавилоняне знали правило суммирования n членов арифметической прогрессии с данными первым и последним членами:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

В селевкидских текстах находятся задачи с суммированием n членов геометрической прогрессии, например $1, 2, 2^2, \dots, 2^9$, правда, способ решения из текста не совсем ясен. По-видимому, было обнаружено, что в такой прогрессии

$$S_n = (S_{n-1} + 1) + S_{n-1},$$

— это легко заметить при небольшом числе слагаемых. Особенно замечательно правило суммирования ряда натуральных квадратов, высказанное применительно к сумме $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2$; в буквенном выражении его можно записать следующим образом:

$$\sum_1^n m^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{3} + n \cdot \frac{2}{3}\right) N, \quad \text{где } N = \sum_1^n m.$$

Был ли этот результат получен самостоятельно, неясно. В ту эпоху ряд натуральных квадратов, правда в несколько иной форме, просуммировал Архимед, и его вывод был известен, во всяком случае, александрийским ученым. С. Я. Лурье предложил остроумную реконструкцию геометрического вывода, дающего сразу только что приведенное правило (эта реконструкция изложена им в примечании к его переводу книги О. Нейгебауера «Лекции по истории античных математических наук»). В клинописных текстах мы находим первые задачи на проценты, как стали говорить, когда венецианские ростовщики ввели в обычай начислять рост «на сто» (pro centum). В отличие от Египта с его натуральным хозяйством, в древнем Вавилоне, стоявшем на перепутье торговых караванов многих народов Передней Азии, рано появились денежные знаки и кредит. Начислялись здесь 12 на 60, т. е., по-нашему, 20%. Вычислялись также сложные «проценты», как полагают, при помощи линейной интерполяции (снова пропорциональная зависимость).

Особый интерес представляет применение, которое получили арифметические прогрессии в астрономии.

Арифметические прогрессии в астрономии

Среди таблиц III—II вв. до н. э. находится таблица лунных эфемерид для 179 г. селевкидской эры (133/132 г. до н. э.), в которой первый столбец — номер месяца, второй — число и шестидесятиричные дроби суток

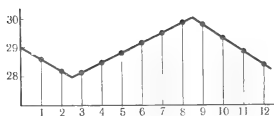


Рис. 3

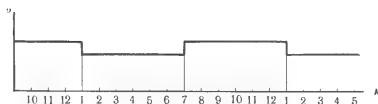


Рис. 4

для момента соединения Луны с Солнцем:

12	28,55,57,58	7	29,31,21,22
1	28,37,57,58	8	29,49,21,22
2	28,19,57,58	9	29,56,36,38
3	28,19,21,22	10	29,38,36,38
4	28,37,21,22	11	29,20,36,38
5	28,55,21,22	12	29, 2,36,38
6	29,13,21,22		

Первые три числа второго столбца — возрастающая арифметическая прогрессия с разностью 18', следующие шесть чисел составляют убывающую прогрессию с той же разностью и, наконец, последние четыре числа этого столбца снова образуют возрастающую прогрессию с той же разностью. График этой функции представляет собой зигзагообразную линию (рис. 3). Наблюдаемые величины времен соединений Луны и Солнца подчиняются значительно более сложной периодической закономерности, но вавилонские астрономы не могли ее точно получить и упрощали результаты наблюдений таким образом, чтобы они выражались уже известными им схемами.

Кроме того, астрономы того же времени составляли таблицы, характеризующие зависимость скорости Солнца v от его эклиптической долготы λ . Эти таблицы можно графически представить ступенчатыми ломаными линиями (рис. 4, где цифрам по оси абсцисс соответствуют 12 созвездий Зодиака).

В современной литературе описанные закономерности астрономических явлений часто называют «зигзагообразными» и «ступенчатыми» функциями. Древние астрономы графиков не строили и понятия функции не вырабатывали. Они просто работали с таблицами, и с помощью этих таблиц старались описать видимые на небе периодически повторяющиеся явления.

Алгебраические методы

Можно спорить о том, являлись ли египетские приемы решения задач на «аха» и приемы их решения алгебраическими или арифметическими. В клинописных текстах мы находим большое число задач, представляющих собой уравнения и системы уравнений первой и второй степени, записанных без символов, но в своей особой терминологии и решаемых с помощью арифметико-алгебраических преобразований. Алгебра линейных и квадратных уравнений достигла высокого уровня уже в эпоху Хаммурапи; рассматривались также уравнения более высоких степеней.

В случае двух неизвестных одно называлось длиной (x), другое — шириной (y), их произведение — «площадью», «полем» или «длиной — шириной»; говорилось также о «сторонах моих квадратов» (т. е. x^2 и y^2). При этом в примерах всегда «длина» больше «ширины» ($x > y$). В задачах, приводящихся к кубическому уравнению, встречалась третья неизвестная — «глубина» (z), а произведение трех неизвестных именовалось «объемом». Приведенная терминология свидетельствует о происхождении ряда алгебраических задач из геометрии, но сами задачи имели совершенно отвлеченный характер. Это проявляется уже в том, что с неизвестными величинами, по названию имеющими различные измерения, обращались как с однородными, составляя выражения, равносильные нашим $xy + x$ и $xyz + xy$. Следует отметить также, что «длина», «ширина», «площадь» и т. д. изображались шумерскими знаками в текстах, написанных на аккадском языке. Поскольку разговорным был уже аккадский язык, а шумерский вышел из употребления, эти знаки приобретали характер настоящих математических символов. В некоторых случаях употреблялись и вовсе отвлеченные названия «множитель» и «обратное», обозначавшие собственно x и $y = 1/x$.

Уравнения первой степени и их системы в клинописных текстах встречаются редко. Способы решения применялись различные: исключение неизвестных, введение вспомогательных неизвестных, правило ложного положения (в случае одного неизвестного) и др. Вот пример из текстов древневавилонского периода, найденных при раскопках города Суз (в нашей символике):

$$\begin{aligned}\frac{y}{4} + x &= 7, \\ x + y &= 10.\end{aligned}$$

Судя по вычислениям в тексте, древний вычислитель после освобождения от дробного коэффициента в первом уравнении и вычитания из него второго получил $3x = 18$, $x = 6$ и $y = 4$.

Область, в которой вавилонянам принадлежит основной успех — это решение задач на квадратные уравнения и системы, сводящиеся к ним. Таких задач в клинописных текстах подавляющее большинство.

Квадратные уравнения

Прежде всего заметим, что вавилоняне не знали ни отрицательных чисел, ни тем более комплексных, и уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$), не имеющие положительных корней, безусловно не рассматривались. Позднее ученые Средних веков, начиная с ал-Хорезми

(первая треть IX в.), различали три канонические формы трехчленных квадратных уравнений, которые могут иметь положительные корни:

$$ax^2 + bx = c, \quad (1)$$

$$ax^2 = bx + c, \quad (2)$$

$$ax^2 + c = bx, \quad (3)$$

или

$$x^2 + px = q, \quad (1')$$

$$x^2 = px + q, \quad (2')$$

$$x^2 + q = px. \quad (3')$$

В клинописных текстах квадратные уравнения принадлежат к формам (1) и (2), которые записывали в виде

$$ax^2 - bx = c \quad (2'')$$

или

$$x^2 - px = q. \quad (2''')$$

Форма (3) или, что то же, (3'), в них не встречается, но имеются задачи, равносильные ей, а именно задачи, выражающиеся канонической системой

$$\left. \begin{aligned} x + y &= p, \\ xy &= q. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Формы (1) и (2'') умножением на число приводились к (1') и (2''').

Уравнения (1) и (2) всегда имеют один положительный корень (другой — отрицательный), и, с точки зрения древнего математика, это положение было самым естественным. Поскольку лишь форма (3) или (3') может иметь два положительных корня, а она в текстах не обнаружена, преждевременно ставить вопрос, известно ли было вавилонянам, что в этом случае корень может иметь два различных значения. Некоторые историки науки полагают, что система (I) решалась путем приведения к форме (3') и неизвестные x , y выступали как два корня (3'). Однако здесь для объяснения выдвигаются две гипотезы, между тем ход вычисления x , y в текстах, естественно, объясняется с помощью одного несложного тождества.

Рассмотрим для примера решение уравнения формы (2''')

$$x^2 - x = 14,30.$$

В тексте сказано: «Я вычел из площади сторону моего квадрата, это 14,30». Далее идет вычисление: «Ты берешь 1, коэффициент ¹. Ты делишь пополам 1, это 0;30. Ты умножаешь 0;30 на 0;30, это 0;15. Ты складываешь [это] с 14,30 и это есть 14,30;15, что является квадратом для 29;30. Ты складываешь 0;30, которое ты умножал, с 29;30, получается 30, сторона квадрата» ².

¹ Здесь просто «число», по-видимому, в отличие от «величины». Древние это различали, что отражено, например, в терминах для сложения и вычитания.

² O. Neugebauer. Mathematische Keilschrifttexte, Bd III. Berlin, 1937, S. 6.

Как видно, вычисление полностью соответствует нашей формуле

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} = \sqrt{(0;30)^2 + 14,30} + 0;30.$$

Само правило решения квадратного уравнения (2), как и (1), было, по всей видимости, найдено дополнением левой части уравнения до полного квадрата. Значит, древневавилонский математик должен был знать правило

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Что касается канонической системы (1), то, по-видимому, ее с помощью тождества

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

приводили к линейной системе

$$\frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}, \quad \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Именно, сначала образовывали

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

и затем находили

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x, \quad \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = y.$$

Помимо канонической системы (1), решались задачи, выражающиеся другой канонической системой

$$\left. \begin{aligned} x - y &= p, \\ xy &= q, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

равносильной форме (2'). Здесь использовалось то же самое тождество для вычисления $(x+y)/2$.

Мы здесь следовали реконструкции решения систем (I) и (II), предложенной К. Фогелем и учитывающей некоторые особенности древних текстов. Как сказано, существуют и другие объяснения, сводящие дело к формулам (3') и (2') или же к двучленному квадратному уравнению. Например, система (I) могла бы быть решена с помощью подстановок

$$x = \frac{p}{2} + z,$$

$$y = \frac{p}{2} - z.$$

Это дает $(p/2)^2 - z^2 = xy = q$, откуда $z = \sqrt{(p/2)^2 - q}$, после чего сразу находятся x, y . Этот ход решения предполагал знакомство с тождеством $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Заметим, что в пользу этой гипотезы, не следующей непосредственно из текстов, но и не противоречащей им, говорит наличие такого метода у Диофанта (III в. н. э.), в творчестве которого гениально синтезированы греческие и восточные традиции.

Решение некоторых задач, т. е. их приведение к каноническому виду, требовало искусного владения алгебраическими преобразованиями. Мы встречаем здесь задачи вида

$$\left. \begin{aligned} xy + \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 15, \\ x + y &= 7, \\ x^2 + y^2 &= 21; 40, \\ xy &= 10, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} xy + (x - y)(x + y) &= 1, 13, 20, \\ x + y &= 1, 40 \end{aligned} \right\}$$

и другие, более сложные. Иногда тексты отражают самые поиски решения. Так, в первой из только что приведенных задач после вычисления $(x + y)/2 = 3;30$ попытка определить «в лоб» полуразность $(x - y)/2$ не удастся, и вычислитель разочарованно пишет: «Дальше не идет». Тогда, вычитая $(x + y)/2$ из левой части первого уравнения, он получает систему

$$\begin{aligned} xy - \frac{y}{6} &= y \left(x - \frac{1}{6} \right) = 11;30, \\ y + \left(x - \frac{1}{6} \right) &= 6;50, \end{aligned}$$

и, принимая $x - \frac{1}{6}$ за новую неизвестную, приходит к системе вида (I), которую умеет решать.

Учение о квадратных уравнениях явилось основой существенно нового этапа в развитии математики, когда наряду с арифметикой и измерением фигур ее полноправной частью стала алгебра. Для решения квадратных уравнений потребовалось многое, и сами они вызвали к жизни цепь новых понятий. Действительно, нужно было уметь производить разнообразные тождественные преобразования, оперировать неизвестными величинами как известными — словом, закладывать основы алгебраического исчисления. Со всем этим было связано также выделение канонических классов задач, решаемых с помощью соответствующих алгоритмов, и разработка приемов сводится к этим классам других задач, по внешнему виду отличных. Вероятно, с развитием методов решения квадратных уравнений задачи, приводящие к линейным уравнениям и особенно к их системам, стали решать алгебраически в более широком объеме. В целом математическое мышление поднялось на новый, значительно более высокий уровень общности и отвлеченности и приобрело большую силу.

Но откуда появились трехчленные квадратные уравнения? Обыкновенные задачи практической геометрии не нуждались в их решении; при рассмотрении подобных фигур достаточно было пропорциональной зависимости, и разве только отыскание гипотенузы прямоугольного треугольника по катетам (если такая задача привлекла бы интерес писцов, знавших уже теорему Пифагора) приводит к извлечению квадратного корня. По всей вероятности, квадратные уравнения появились в результате развития самой науки, из обращения задач, поставленных практикой.

Схематически можно представить себе постановку простейших вопросов подобного рода следующим образом. Зная стороны прямоугольника

x , y , легко подсчитать его площадь xy и периметр $2x + 2y$. Но если спросить, каковы стороны прямоугольника данного периметра $2p$ и площади q , то возникает каноническая система (I). Точно так же отыскание катетов по площади прямоугольного треугольника и гипотенузе приводили к системе

$$\begin{aligned} xy &= a, \\ x^2 + y^2 &= b. \end{aligned}$$

Такого рода задачи встречаются также в текстах эпохи Селевкидов; они могли возникнуть и ранее. Взаимно обратные задачи, одна из которых линейная, а две другие второй степени, причем все три с одними и теми же числовыми значениями, были обнаружены К. Фогелем и в древнеави-лонских текстах. Возникающие при таком обращении системы могли быть затем сведены к трехчленным квадратным уравнениям. Во всяком случае, при постановке и решении подобного рода проблем абстрагирующая математическая мысль одержала один из своих первых замечательных триумфов.

Вавилоняне решали также некоторые задачи, выражающиеся кубическими уравнениями. Ставился вопрос об определении ребер прямоугольного параллелепипеда по данной сумме объема и площади одной грани, т. е. $xyz + xy$, и некоторым условиям, наложенным на ребра. В зависимости от этих условий получаются уравнения первой, второй и третьей степеней, последнее, например, в случаях

$$\left. \begin{aligned} xyz + xy &= 1;10, \\ y &= 0;40 x, \\ z &= 12 x \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} xyz + xy &= 1;10, \\ x + y &= 0;50, \\ z &= 12 x. \end{aligned} \right\}$$

В первом случае задача приводится к уравнению

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 4;12$$

и была решена, скорее всего, с помощью таблицы чисел $n^3 + n^2$, о которой упоминалось ранее ($x = 0;30$ и т. д.). Во втором случае проводился подбор тех же самых значений неизвестных с помощью искусного разложения на множители.

В сузских текстах обнаружено даже уравнение восьмой степени, которое, впрочем, является квадратным относительно x^4 и приводится к виду

$$(x^4)^2 + 20,0^2 (x^4) = 14,48,53,20^2.$$

Приближенное вычисление корней

В задачах на квадратные и высшие уравнения корни всегда являются рациональными. Однако в геометрических приложениях вавилоняне встретились и с проблемой извлечения квадратных корней из неквадратных чисел. Тексты ничего не сообщают о том, приблизились ли математики древнего Двуречья к идее иррационального числа. Они лишь содержат неоднократно встречающееся затем и у других народов правило

$$\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

(здесь a^2 — наибольший целый квадрат, меньший $N = a^2 + r$) с объяснением, основанным на том, что

$$\left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 = a^2 + r + \left(\frac{r}{2a}\right)^2,$$

а $(r/2a)^2$ мало и им можно пренебречь, и некоторые приближенные значения, например $\sqrt{2} = 1;25$, $\sqrt{3} = 1;45$, $\sqrt{10} = 3;10$ и еще $\sqrt{2} = 1;24,51,10$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0;42,30$. Найдя некоторое приближение по указанному правилу или же непосредственно подбором, его умели улучшить, по-видимому, при помощи следующего итерационного приема. Если первое приближение с недостатком есть a , то $b = N/a$ будет приближением с избытком. Второе приближение образуется как среднеарифметическое $a_1 = (a + b)/2$ (заметим, что если $N = a^2 + r$, то $a_1 = a + \frac{r}{2a}$), и этому избыточному приближению соответствует недостаточное $b_1 = N/a_1$. Дальнейшие приближения следуют по тому же закону, т. е. $a_2 = (a_1 + b_1)/2$, $b_2 = N/a_2$ и т. д.

Приближение $\sqrt{2} = 1;25$ можно получить в качестве a_2 , отправляясь от $a = 1$, $b = 2$ (или сразу от $a_1 = 1;30$, $b_1 = 1;20$), приближение же $\sqrt{2} = 1;24,51,10$ можно получить в качестве a_3 ; любопытно, что оно требует деления на «неправильное» число 17 [так как $a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right)$]. Это приближение a_3 имеет все знаки верные, т. е. дает пять верных десятичных знаков. На клинописной табличке, хранящейся в Йельском университете, изображен квадрат со стороной 30 и диагоналями; вдоль одной из них указано отношение диагонали к стороне, равное 1;24,51,10, а ниже — длина диагонали 42;25,36.

Геометрия у вавилонян

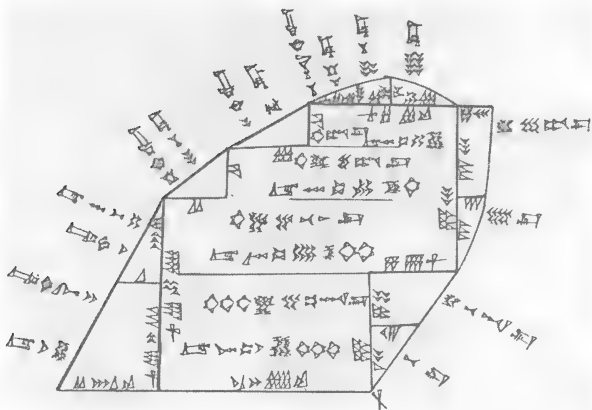
Геометрические знания вавилонян, как и египтян, относились большей частью к измерению простейших фигур, встречающихся при межевании земель, возведении стен и насыпей, строительстве плотин и каналов и т. п. Сохранилось немало планов земельных угодий, разделенных на прямоугольники, трапеции и треугольники, а также планов различных строений, свидетельствующих, что вавилонский землемер или архитектор должен был хорошо чертить и проводить геометрические расчеты. Но, как и в алгебре, вавилоняне значительно дальше продвинулись в разработке более общих и отвлеченных отделов геометрии. Об этом мы судим опять-таки по их задачам, так как тексты не содержат ничего, кроме задач, их решения и, в виде редкого исключения, формулировки общих правил, теорем или определений. Область рассматриваемых плоских и телесных объектов в основном совпадала с египетской, но была расширена: изучению были подвергнуты некоторые правильные многоугольники, сегмент круга, усеченный конус.

Наряду с точными правилами вавилоняне употребляли и приближенные. К числу последних относятся, например, выражение площади четырехугольника общего вида произведением полусумм противоположных сторон и вычисление объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями через произведение полусуммы оснований на высоту $\left(V = \frac{a^2 + b^2}{2} h\right)$;



Вавилонский план дома из Уммы (Берлин,
Переднеазиатский музей)

Вавилонский план поля
(*B. Meissner. Babylonien und Assyrien, Bd. II. Heidelberg, 1925, S. 390*)



точно так же находили объем усеченного конуса. Впрочем, по всей вероятности, было известно и точное правило для усеченной пирамиды в той форме, в какой оно имеется у Герона Александрийского в I в. н. э.

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] h.$$

Длину окружности вычисляли, утраивая диаметр; с таким же значением $\pi = 3$ определяли площадь круга. Однако эта площадь S выражается не непосредственно через диаметр, а через длину окружности C по правилу $S = C^2/12$. Если приближение $\pi = 3$, встречающееся также в Библии, было довольно грубым, то вавилонское правило вычисления площади круга впервые связывало эту величину с длиной окружности. Быть может, этот замечательный результат нашли, рассматривая круг как правильный многоугольник ($S = Cd/4$, где $d = C/3$)? Позднее такое же правило употребляли в Китае и Индии. В одном тексте вавилонский вычислитель пользуется лучшим приближением: $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$.

Не останавливаясь на других правилах приближенного измерения площадей и объемов, мы рассмотрим теперь одно из лучших открытий, сделанных в Вавилоне: в клинописных текстах впервые появляется, и притом для общего случая, теорема Пифагора.

Теорема Пифагора

Открытие и доказательство этой теоремы греки связывали с именем только что названного философа VI в. до н. э., которую китайцы знали, быть может, несколькими столетиями ранее. В клинописных текстах она восходит еще к эпохе Хаммурапи.

Мы уже упоминали, что вавилоняне знали числовое соотношение между сторонами прямоугольного треугольника. Нельзя не подчеркнуть фундаментальное значение этого предложения, лежащего в основании метрики евклидовой геометрии и в XIX в. оказавшегося прототипом метрик неевклидовых пространств.

Как пришли вавилоняне к теореме Пифагора, неизвестно. Быть может, они сначала заметили, что некоторые треугольники с целочисленными сторонами a , b , c , удовлетворяющими равенству $a^2 + b^2 = c^2$, прямоугольны, а потом распространили такое свойство на все прямоугольные треугольники? Во всяком случае, еще в древневавилонскую эпоху знали множество троек целых «пифагоровых чисел». До нас дошла одна таблица, содержащая 15 строк чисел вида $\frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{b^2}{c^2}$, b и c . Если вычислить соответствующие значения катета a , то оказывается, что в таблице, помимо весьма простых по структуре троек, как 60, 45, 75, т. е. 4·15, 3·15, 5·15, имеются гораздо более сложные, например 72, 65, 97 или 3456, 3367, 4825 и т. д., — мы записали их в десятичной системе. О происхождении этой таблицы высказаны две гипотезы. О. Нейгебауер и А. Сакс полагают, что вавилоняне составляли ее по правилу, которое затем встречается у Евклида

$$a = 2pq, \quad b = p^2 - q^2, \quad c = p^2 + q^2$$

(p, q — взаимно простые, $p > q$). Э. М. Брёйнс считает, что принимали

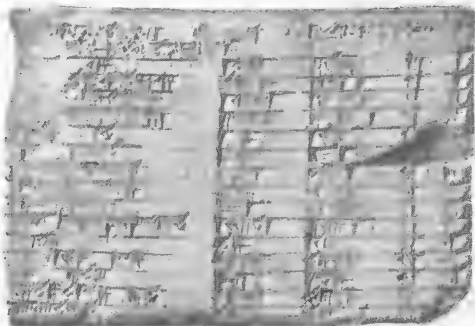
$$a = 1, b = \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{n} \right), c = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{n} \right)$$

и пользовались таблицей обратных значений, после чего приводили все к целым числам. Как бы то ни было, невероятно, чтобы таблица была составлена простым подбором без некоторого общего приема.

Впрочем, решение неопределенного уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в целых или рациональных числах относится уже к теории чисел, о которой еще будет идти речь далее (вопрос о назначении имеющихся в таблице чисел вида b^2/a^2 мы оставим в стороне). Вернемся к геометрическим задачам. Теорема Пифагора находила в Вавилоне разнообразные применения. С ее помощью, например, вычисляли диагональ квадрата и радиус окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника, по боковой стороне b и основанию $2a$. В последней задаче теорему приходилось применять дважды: сначала для нахождения высоты, опущенной на основание $h = \sqrt{b^2 - a^2}$ (в примере $h = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$), и затем для вычисления радиуса x из уравнения $(h - x)^2 + a^2 = x^2$ (в примере $x = 31;15$). Сохранился, хотя и не полностью, древневавилонский чертёж, на котором видны аккуратно проведенная циркулем дуга описанной окружности и числовое значение радиуса.

Выше говорилось о тексте эпохи Селевкидов, содержащем серию задач на квадратные уравнения, в которых основную роль играет эта теорема. Одна из таких задач, приводящаяся, впрочем, к уравнению первой степени,

Клинописная числовая таблица
(Нью-Йорк. Плимптоновский фонд Колумбийской библиотеки)



особенно любопытна. В ней требуется найти длину шеста (x), сначала вертикально прислоненного к стене, а затем смещенного так, что его верхний конец опускается на 3 локтя, причем нижний конец отступает от стены на 9 локтей. Уравнение $x^2 = 9^2 + (x - 3)^2$ дает $6x = 90$, $x = 15$. Позднее эта задача вновь появляется в математике древнего Китая и Индии.

Несколько иной вариант этой же задачи имеется в древневавилонских текстах: даны высота стены и равная длина шеста, а также отрезок, на который опускается его верхний конец; требуется найти, насколько отступит нижний конец от стены. Следует упомянуть еще одну задачу, в которой даны периметр $a + b + c = p$ и площадь треугольника $ab = q$ и для c приведено значение $\frac{1}{2} \frac{(p^2 - 2q)}{p}$. Она интересна тем, что,

в отличие от других известных нам задач, где приводятся лишь сами выкладки, здесь высказано общее правило: «Умножь длину, ширину и диагональ на длину, ширину и диагональ. Умножь площадь на 2 и вычти это» и т. д. Можно полагать, что именно такие общие правила изучались в школах писцов.

Теорема Пифагора применялась и для вычисления стягивающей сегмент круга хорды (u) по стреле сегмента ($t = 2$) и длине окружности (60), т. е. по стреле и диаметру ($d = 20$). Выкладки можно представить формулой $u = \sqrt{d^2 - (d - 2t)^2} = 12$. Вряд ли этот результат мог быть получен без знакомства с предложением, что вписанный в полукруг треугольник — прямоугольный.

Наконец, теорема Пифагора несомненно была использована вавилонскими учеными, когда они рассматривали правильные многоугольники.

Правильные многоугольники

Более строгая теория правильных многоугольников явилась одним из выдающихся достижений пифагорейской школы.

Как уже говорилось, в некоторых клинописных текстах были обнаружены таблицы констант, которыми пользовались в хозяйственных расчетах. Эти таблицы содержат константы $4,40 = S_5$, $2,37,20 = S_6$, $3,41 = S_7$, причем они соотносятся с правильными пяти-, шести- и семиугольниками соответственно. Э. М. Брэйнс разъяснил значение этих чисел: они дают площади названных многоугольников, если сторона принята за единицу. Вычисление основано на приближенном равенстве $a_n \approx C/n$, где C — длина окружности, в которую вписан многоугольник со стороной a_n (рис. 5). Тогда

$$S_n = n \frac{a_n h_n}{2} = \frac{n}{2} a_n \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}.$$

Здесь d — диаметр круга, который считается равным $C/3$. Пусть $a_n = 1$, тогда $S = \frac{n}{12} \sqrt{n^2 - 9}$. При $n = 5, 6, 7$ получаются указанные значения S_5, S_6, S_7 .

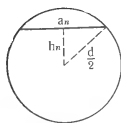
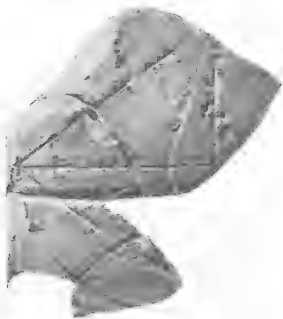
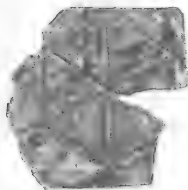


Рис. 5

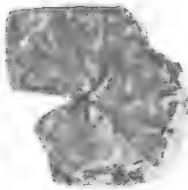
Вавилонские чертежи равнобедренного треугольника и дуги описанного круга (а), шестиугольника (б), семиугольника (с)
(E. M. Bruins, M. Rutten. Textes mathématiques de Suse. Paris, 1964, tables I. II. III)



а



б



в

Конечно, вавилоняне могли и не пользоваться общей формулой, а каждый раз в отдельности подсчитывать эти значения. Например, для пятиугольника будет следующий алгоритм:

$$C = 1.5 = 5,$$

$$d = \frac{1}{3} \cdot 5 = 1;40,$$

$$\frac{d}{2} = 0;50,$$

$$h_5 = \sqrt{0;50 \cdot 0;30^2} = 0;40,$$

$$\frac{1}{5} S_5 = \frac{1}{2} \cdot 0;40 \cdot 1 = 0;20,$$

$$S_5 = 0;20 \cdot 5 = 1;40.$$

Эти вычисления, как и решение квадратного уравнения, требовали извлечения квадратного корня. При вычислении площади семиугольника нужно было извлечь $\sqrt{10} = 3;10$, а для шестиугольника $\sqrt{3} = 1;45$.

Зная постоянные S_5 , S_6 , S_7 , вавилоняне могли найти площади одноименных многоугольников при любом другом числовом значении стороны a_n ; для этого требуется лишь умножить S_n на a_n^2 . Дело в том, что им, по-видимому, были известны некоторые свойства подобных фигур, хотя ни понятие подобия, ни эти свойства в их текстах нигде не высказаны.

Подобие и пропорциональность

Некоторые задачи, которые мы бы решали, используя подобие треугольников, вавилоняне решали, видимо, по-иному. Такова, например, следующая задача (числовые данные в ней мы заменим буквенными). В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 6) даны катет $AC = h_1 + h_2$ и площадь S трапеции $ABED$, отсекаемая отрезком $DE = y$, перпендикулярным катету AC (т. е. параллельным другому катету $AB = x$). Для отыскания x и y сначала находят их полусумму и полуразность (с подобного рода приемом мы уже встречались). Действительно, легко видеть, что $(x + y)/2 = S/h_1$. Кроме того, согласно вычислениям, приведенным в тексте $(x - y)/2 = S/(2h_2 + h_1)$. Это равенство могло быть найдено из подобия треугольников с катетами h_2 , y ; $h_2 + h_1$, x и h_1 , $x - y$. Но здесь не обязательно прибегать к подобию, и тот же результат нетрудно получить, если произвести сдвиг треугольника DEC в положение FBC . Это позволяет установить, что площади заштрихованных трапеций $ABED$ и $AFGC$ равны (ибо равновелики $FBEH$ и $DHGC$), и тогда

$$S = \text{пл. } AFGC = \frac{x-y}{2} (2h_2 + h_1).$$

Вполне возможно, что именно так поступал древневавилонский математик. Конечно, это предполагает, по существу, знакомство с некоторыми свойствами параллельных прямых ($\angle DEC = \angle ABC$) и случаем равен-

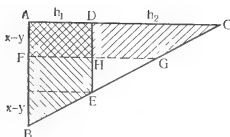


Рис. 6

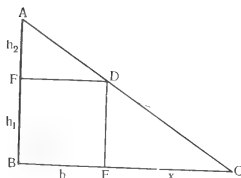


Рис. 7

ства прямоугольных треугольников (при равенстве двух катетов и прилежащих острых углов). Обо всем этом в тексте нет ни слова (как нет и термина для параллели, для проведения перпендикуляра он имеется). Однако мы вполне можем допустить наличие соответствующих наглядных представлений.

Но имеются и другие задачи, говорящие в пользу того, что вавилоняне уже пользовались подобием. В одной задаче даны стена высоты h_1 и толщины b , а также водруженный на ней шест длины h_2 (рис. 7). Спрашивается, на сколько (x) следует удалиться от стены, чтобы стала видна верхушка шеста. Ответ $x = \frac{h_1}{h_2} b$ проще всего следует из подобия прямоугольных треугольников AFD и DEC . Правда, его можно несколько сложнее получить, приравняв площадь $ABC = \frac{(x+b)(h_1+h_2)}{2}$ сумме составляющих ее площадей $bh_1 + \frac{bh_2}{2} + \frac{xh_1}{2}$.

Многие другие задачи также говорят в пользу предположения, что подобием прямоугольных треугольников пользовались и в той или иной форме знали соотношения между соответственными линейными элементами и между площадями двух таких фигур: либо в виде пропорции

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ и } \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}, \text{ либо в виде равенств произведений } a_1b_2 = a_2b_1$$

и $S_1a_2^2 = S_2a_1^2$. К сожалению, имеющийся материал не позволяет выйти за пределы более или менее правдоподобных догадок. Несомненно лишь, что в древнем Вавилоне умели решать многие задачи, которые проще всего решать на основании подобия.

Нам остается сказать еще несколько слов о возникавших в области геометрии теоретико-числовых задачах.

Теоретико-числовые задачи

Об одной подобной задаче — решении уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в целых числах уже говорилось. Такими целыми числами являются тройки «пифагоровых чисел». Другие проблемы теории чисел связаны с задачей деления прямоугольных треугольников и трапеций на равновеликие полосы с помощью прямых, параллельных основанию. При этом, естественно,

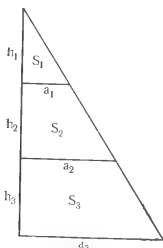


Рис. 8

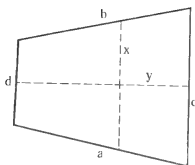


Рис. 9

предполагалось, что сторона фигуры, перпендикулярная основанию, делится на рациональные отрезки, а это значит, что рациональными должны быть и параллельные основанию отрезки.

Пусть прямоугольный треугольник (рис. 8) рассечен линиями a_1 , a_2 , параллельными основанию a_3 , на части с площадями S_1 , S_2 , S_3 так, чтобы какая-либо пара частей была равновеликой. Есть три возможности такого раздела.

1. $S_1 = S_2$. Но тогда $2a_1^3 = a_2^3$ [ибо $S_1 : (S_1 + S_2) = a_1^2 : a_2^2$] и значения a_1 и a_2 не могут быть одновременно рациональными. С точки зрения вавилонянина, задача не имеет решения, он ее и не рассматривал.

Зато в двух других случаях были найдены красивые теоретико-числовые закономерности.

2. $S_1 = S_3$. Тогда в силу таких же соображений $a_1^2 + a_2^2 = a_3^2$. Решениями будут уже известные нам тройки пифагоровых чисел, точнее — пропорциональные им отрезки.

3. Пусть, наконец, $S_2 = S_3$. Такого рода деления прямоугольной трапеции на две равновеликие полосы — излюбленная задача вавилонян. В этом случае $2a_2^2 = a_3^2 + a_1^2$. Вавилонские математики нашли, что решениями будут: $a_1 = l(m - n)$, $a_2 = lk$, $a_3 = l(m + n)$, где n , m , k — пифагоровы числа, l — рациональный коэффициент. Если $l = 1$, то получаются тройки $a_1 = m - n$, $a_2 = k$, $a_3 = m + n$, которые исследовавший их А. А. Вайман назвал «вавилонскими».

Вавилонские числа a_1 , a_2 , a_3 располагаются в непрерывную цепочку, т. е. начало следующей тройки совпадает с концом предыдущей

n	m	k	a_1	a_2	a_3
3	4	5	1	5	7
5	12	13	7	13	17
7	24	25	17	25	31
9	40	41	31	41	49 и т. д.

Вавилонские ученые пытались обобщить эту задачу и решить ее в случае деления трапеции на p равновеликих параллельных полос.

Удивительная закономерность вавилонских чисел дала повод к рассмотрению неких «приближенных», условных трапеций, представляющих собой произвольный четырехугольник (почти трапеция) со сторонами, близкими к параллельным (рис. 9). Площадь такого четырехугольника вычислялась по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$. Интересно, что иногда в задачах берется $S = 1$. Эта условная трапеция делится линиями x и y на равновеликие полосы, так что c , x , d и a , y , b пропорциональны тройкам вавилонских чисел.

Значение математики древнего Вавилона

Насколько мы можем судить по известным до сих пор текстам, математика в древнем Вавилоне достигла более высокого уровня, чем в древнем Египте, хотя и она была далека еще от того идеала дедуктивной науки, который сформировался в Греции и классическим образом которого стали «Начала» Евклида. Несмотря на гораздо больший объем фактических знаний, более совершенные приемы вычислений, возникновение целых новых направлений и очевидный рост элементов логической дедукции, в древневавилонской математике внутренние логические связи между многочисленными правилами были еще слабыми и отдельные цепочки выводов не объединялись в целостные системы. Догматический характер изложения не был просто педагогическим приемом, он отражал, как и в Египте, авторитарный склад мышления, господствовавший в строго иерархических и деспотических государствах древнего Востока. Математическому мышлению не было свойственно стремление к углубленному анализу применяемых идей, требующему прежде всего их четкого выделения, а ученым не требовалось убеждать ни других, ни самих себя в истинности правил и методов с помощью доводов разума. Мышление было обращено вовне, ему недоставало обращения на самого себя. Вероятно, поэтому древние математики Двуречья, блестяще решавшие задачу приближенного вычисления чисел, обратных неправильным, или значений встречающихся им в геометрии квадратных корней из неквадратных чисел, прошли мимо открытия периодических шестидесятиричных дробей и иррациональных чисел.

При всем этом открытия, сделанные вавилонскими писцами, поражают своим размахом. Здесь впервые возникла система счисления, основанная на позиционном принципе и, позднее, на употреблении знака нуля (греки, в эпоху расцвета мало интересовавшиеся техникой вычислений, обходились гораздо менее совершенной нумерацией). Здесь впервые же была разработана алгебра линейных и квадратных уравнений и даже рассмотрены простейшие уравнения более высоких степеней. Если к этому добавить открытие теоремы Пифагора и начала учения о правильных многоугольниках в области геометрии и в самой тесной связи с задачами геометрии постановку и решение первых задач теории чисел, которые мы теперь относим к диофантову анализу, то значимость достижений математики древнего Вавилона не может вызывать сомнений.

Столь же несомненно, что вавилонская математика оказала существенное влияние на последующее развитие математики. Власть Вавилонской империи веками распространялась на обширнейшие земли Азии, и элементы сложившейся в ней культуры, естественно, включались в культуру народов, проживавших на этих землях, — народов, находившихся

в торговых и политических связях с Вавилоном, и даже народов, подчинявших его себе. Мы не располагаем свидетельскими показаниями ученых о научных контактах тех отдаленных времен: авторы математических текстов не ссылались тогда на свои источники. Древние греки лишь в самых общих выражениях рассказывали о поездках своих первых ученых в Египет и Азию. Трудно думать, однако, что греческие колонисты в Малой Азии, где возникла ионийская школа натурфилософии, не были знакомы с научной традицией, складывавшейся здесь на протяжении долгих веков. Во всяком случае, древние греки начинали с исследований тех проблем, которые издавна занимали вавилонян,—со свойств прямоугольных треугольников и правильных многоугольников, теоремы Пифагора и пифагоровых чисел, задач на квадратные уравнения и прогрессии и т. д. Позднее, уже в эллинистическое время, контакт греческой и вавилонской науки принес особенно ценные плоды как в астрономии, так и в математике. Влияние вавилонской шестидесятиричной нумерации отразилось здесь на арифметике дробей и делении круга, которым пользуются до сих пор. История возникновения позиционной десятичной нумерации полна пробелов, но не исключено, что через эллинистическую культуру, а может быть и непосредственно, принцип поместного значения проник в Индию. С полной уверенностью можно говорить о плодотворном воздействии традиций, восходящих к вавилонской алгебре,— это ощущается у Герона, затем у великого Диофанта, а еще позднее у ал-Хорезми и других основателей алгебраической школы стран ислама.

В эпоху, когда египетское и вавилонское государства клонились к упадку, на исторической сцене появился новый народ — греки, которым предстояло вскоре поднять культуру на небывалую высоту во всех основных ее областях — формы политической жизни, изящных искусств, литературы, науки и философии. Как мы сказали, греки были обязаны многими начальными математическими знаниями ученым Востока. Но они вскоре далеко превзошли своих учителей и впервые начали развивать математику как точную науку в нашем современном смысле. Преобразование математики из совокупности отдельных расчетных правил и приемов построений в совокупность стройных дедуктивных систем предложений, в которой эти правила и приемы получают свое строгое обоснование, явилось делом древних греков.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА

ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ

Греческое чудо

От математики древнего Востока до нас дошли отдельные задачи с решениями и таблицы. В древней Греции мы наблюдаем уже совершенно новое явление — рождение науки, основанной на строгих доказательствах. Этот важнейший скачок в истории науки относится к тем же VI—V вв. до н. э., которые отмечены такими бессмертными творениями греческого гения, как создание демократического государства и появление трагедии и комедии. Каждого из них было бы достаточно, чтобы считать это время важнейшей вехой в истории человечества, а появление всех трех граничит с чудом.

Помимо материковой Греции, островов и малоазиатского побережья, греки с давних пор стали селиться и в других странах. Греческие колонии в Италии получили название «Великой Греции» (об этих колониях напоминает греческое название Неаполя).

В VI в. до н. э. в большинстве греческих государств происходят восстания, результатом которых явилась смена господства рабовладельческой аристократии правлением народа — демократией, конечно также рабовладельческой. «Они первые и единственные в то время, — говорил Лисий о греках, — изгнали бывших у них царей и установили у себя демократию, полагая, что свобода всех производит величайшее единодушие... Властвовать друг над другом путем насилия, думали они, свойственно диким зверям, а люди должны законом определить справедливое, словом убедить, делом повиноваться тому и другому; закон должен быть царем, слово — паставником»¹.

Конечно, с нашей точки зрения античная демократия была весьма ограничена, а экономические основы античного общества — весьма несовершенны. В управлении государством могли принимать участие только свободные граждане, и притом только мужчины, — из общественной жизни исключались женщины, уроженцы других областей и тем более рабы. Но даже такая ограниченная демократия принесла на первых порах совершенно удивительные плоды.

В начале V в. до н. э. на молодые города-государства Греции обрушился страшный враг — персы. Первым завоеванием персов было ионийское побережье (VI в. до н. э.). После потери Ионии на первое место выдвигается Аттика в материковой Греции и ее столица Афины. Аттика и становится во главе сопротивления персам и сплачивает вокруг себя греческие государства. «Неисчислимые, необозримые слала Азия полчищ тучи против Эллады», — писал Эсхил. Греки никогда не видели столь многочисленного войска. Объединившись, они выступили против персов и дважды одержали победы — в 490 г. при Марафоне и десять лет

¹ Лисий. Речь. Перевод С. И. Соболевского. М.—Л., 1933, стр. 47.

спустя при Саламине. Последняя битва и решила исход войны. И поэты и историки античности, обдумывая вопрос о том, почему маленькая Греция сумела дать отпор намного ее превосходящим по численности ордам захватчиков, единодушно приписывали свою победу возникшему у них новому демократическому строю. В трагедии Эсхила «Персы» мать персидского царя Дария Атосса спрашивает у хора: «Кто ж погощик властный войска, самодержец кто у них?» — и с удивлением выслушивает ответ: «Не рабы они, владыка, не подвластны никому». В греко-персидских войнах свободные граждане Эллады одержали верх над бесправными рабами персидского царя.

Такую же величайшую победу они одержали и в науке.

После победы над персами Афины становятся политическим и культурным центром Греции. Происходит реконструкция города, который был почти полностью сожжен, строится Парфенон, все скульптуры которого создаются знаменитым Фидием и его учениками. Афины украшаются многочисленными храмами, заново отстраивается военный и торговый порт — Пирей.

Конец V — начало IV в. до н. э. — это золотой век Афин. Сюда стекаются замечательные люди со всех сторон античного мира: Анаксагор из Клазомен, Демокрит из Абдера, Гиппий из Элиды, Феодор из Кирены, врач Гиппократ из Косса, Аристотель из Стагиры. Их привлекает интенсивная интеллектуальная жизнь, кипящая в Афинах, где Сократ умел будить мысль своих слушателей и помогал ее рождению, где была создана знаменитая Академия Платона, а затем и не менее знаменитый Лицей Аристотеля — прообраз будущих университетов.

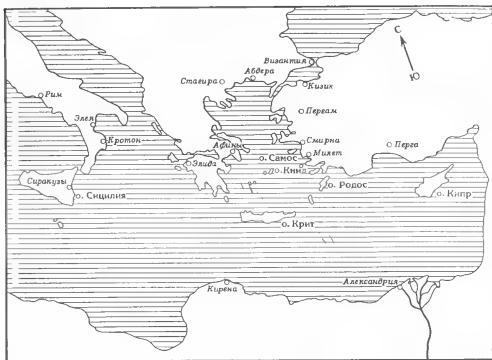
Однако уже в конце V в. разражается затяжная Пелопоннесская война, которая подрывает мощь Афин. В последней трети IV в. на политическую арену древнего мира выступает Македония. В 337 г. Филипп разбил объединенные силы греческих городов, а его сын Александр (356—323 гг. до н. э.), закрепив гегемонию Македонии в Греции, начал завоевание Востока.

После походов Александра Македонского во всех покоренных им странах получают широкое распространение греческий язык и греческая культура, которая сплавляется с культурой покоренных народов в так называемую эллинистическую культуру.

Греческая наука

Мы видели, что в странах древнего Востока были накоплены математические факты, методы решения задач, примеры приближенных вычислений. Однако математики как науки в нашем теперешнем понимании, т. е. развитой дедуктивной системы предложений, не было. Изложение в дошедших до нас сборниках задач было догматическим, без обоснования правильности предлагаемых правил. Напомним еще, что математика на древнем Востоке развивалась крайне медленно. На протяжении веков и даже тысячелетий не было заметно никакого прогресса.

Примерно на таком же (или более низком) уровне были и математические знания в Греции VIII—VII вв. до н. э. Но вот в VI в. положение резко меняется. Математика с поражающей быстротой преобразуется в абстрактную дедуктивную науку, в которой основным методом установления истины и исследования связи между предложениями становится



Древнее Средиземноморье

логическое доказательство. Как писал Аристотель, доказательство выявляет сущность вещей. При этом вторая функция доказательства (выяснение связей) не менее важна, чем первая, т. е. установление истины. Часто бывает, что в истинности некоторого предложения никто не сомневается (как это было около двух тысяч лет с постулатом о параллельных), но все-таки упорно ищут для него доказательства, чтобы установить, от каких предложений оно зависит, к какому классу свойств или отношений принадлежит. Иногда случается и так, что предложение уже доказано, но математики ищут новых доказательств, потому что старое кажется им искусственным или основанным на излишних посылках или еще потому, что они предугадывают связи рассматриваемого предложения с другими частями математики и хотят более точно выявить эти связи. Так было, например, с квадратичным законом взаимности — одной из центральных теорем теории чисел (см. т. III, гл. 3), для которой Гаусс нашел восемь различных доказательств (а теперь их известно уже около 40), с основной теоремой алгебры (см. т. III, гл. 2) и рядом других предложений.

Таким образом, доказательства служат в математике средством упорядочения предложений, исследования их взаимных зависимостей или, если угодно, средством организации системы и понижения ее энтропии. Слова Аристотеля показывают, что греки поняли эту сторону дедуктивного метода.

В VI в. до н. э. были построены не только первые математические теории, но и первые математические модели мира. В это время ученые пришли к мысли, к которой возвращались затем не раз, что математика является универсальным языком для выражения законов природы, что «все есть число».

В течение следующих трех веков создаются теории, тонкость и глубина которых были поняты и оценены только в XIX в., а иногда лишь

в XX в. Приведем для примера теорию отношений Евдокса, которая по существу совпадает с обоснованием действительного числа, предложенным в конце прошлого века Дедекиндом. Формальная логика Аристотеля подверглась исчерпывающему анализу только в наши дни. При этом стиль математических произведений того времени не отличался от современного. Теория строилась исходя из конечного числа посылок, и ее положения выводились из них с помощью конечной цепочки логических умозаключений или эффективных конструкций. Такой метод изложения греки пачили впервые, показав, как можно и как нужно строить науку.

В настоящее время мы присутствуем при проникновении математических методов в химию, биологию, психологию, экономику и языкознание. Но даже теперь такое преобразование новых областей науки является весьма нелегким делом, не говоря уже о той инерции умов, которую всякий раз приходится преодолевать. Можно себе представить, как трудно было впервые проделать этот путь.

Как же это произошло? Почему стал возможен такой скачок?

По-видимому, он не мог быть вызван внутренними потребностями самой математики, находившейся еще на невысокой ступени развития. Он не мог быть вызван и потребностями техники, потому что техника античной Греции мало чем отличалась от той, которая была в древнем Вавилоне или Египте, а несколько позднее в Риме. В своей книге «История эмбриологии» Нидэм отмечает, что в древнем Египте уже со времен Среднего царства применялись инкубаторы, но не было эмбриологии, в Греции же, наоборот, не было инкубаторов, но была эмбриология.

С другой стороны, аналогичные изменения в то время произошли не только в математике. Догматы религии были поколеблены. Появились первые натурфилософские школы, которые создали модели мира, основываясь на наблюдениях и логических рассуждениях. Греческие мыслители пытались так же, как это делали математики, вывести строго логически всю систему мира из конечного числа положений, принимаемых без доказательства. А теории и возражения своих противников они старались опровергнуть, пайдя в их рассуждениях логическое противоречие или показав, что следствие из выдвигаемых ими положений ложно (доказательство от противного!). Научная полемика очень характерна для этого времени. Столь же характерны и политические дебаты, и публичные выступления в судах. Причем и здесь, и там стороны стремятся обосновать свои положения с помощью безупречной аргументации и показать логическую нитчатость утверждений противника. Проходит немного времени, и начинается исследование законов самой логики, что находит блестящее завершение в системе Аристотеля.

Естественно для такого общего явления искать и общие основания. Так делали и сами греки. Свои успехи они приписывали возникшему у них повому демократическому строю. Согласно Аристотелю, демократия есть такое государственное устройство, которое в наибольшей степени способствует проявлению всех возможностей, заложенных в каждом из сограждан¹.

¹ Большая часть нашей современной терминологии, связанной с государственным устройством, как-то: аристократия, демократия, тирания, олигархия, демагогия, была создана греками и употреблялась в основном в том же смысле, что и теперь. Аристотель описал 157 различных демократических государственных устройств (конституций).

Аристотель придавал большое значение и досугу граждан. Дело в том, что наукой занимались тогда еще не профессионалы, специально оплачиваемые за это обществом, а, как мы бы сказали теперь, любители, располагавшие возможностью ту или иную часть своего времени уделять размышлениям, не связанным с повседневными заботами. Впрочем, уже тогда были платные учителя, а несколько позднее в Александрии возникла своего рода высшая школа наук, финансируемая государством. Появление досуга объясняется не высокой производительностью труда и применением машин, как это имеет место в нашем обществе, а применением труда рабов.

Греческие нумерации

Первоначально греки пользовались так называемой аттической нумерацией, которую называют также геродиановой по имени описавшего ее грамматика Геродиана (II в. н. э.). Аттическая нумерация была основана на аддитивном принципе и очень близка к римской нумерации. Основными знаками этой нумерации были I, Γ, Δ, Ϛ, Н, Ϟ и Χ, означавшие соответственно 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000. Цифры аттической (геродиановой) нумерации и цифры римской нумерации изображены в восьмом и девятом столбцах таблицы (см. стр. 22). Знаки I и Γ, как и римские цифры I и V, были вначале обозначениями пальца и руки, впоследствии знак Γ стали воспринимать как первую букву слова πέντε — пять (эта буква в современном греческом алфавите имеет вид Π, но первоначально она имела вид Γ, что ясно из вида произошедшей от нее латинской буквы Р). Поэтому 10 стали обозначать буквой Δ — первой буквой слова δέκα (десять), 100 — буквой Н — первой буквой слова ἑκατόν (экаτον) (сто), а 1000 — буквой Χ — первой буквой слова χίλις (тысяча). Цифры Ϛ и Ϟ — соедипения знаков Γ, Δ и Н; образование этих цифр основано на мультипликативном принципе.

Аттическая нумерация была тесно связана со счетной доской — абакком. Абак разграфлялся на столбцы, соответствующие десятичным разрядам. Числа на абакке обозначались камешком. Аттическая нумерация представляла собой запись результатов вычисления на абакке, причем камешки в различных столбцах изображались знаками I, Δ, Н, Χ, а пятерки камешков — знаками Γ, Ϛ и Ϟ. Вычисление с помощью камешков на абакке было заимствовано у греков римлянами: от латинского слова *calculus* (камешек) и происходит наш термин «калькуляция». Позже абак перестали разграфлять, а для обозначения пустого разряда, т. е. нуля, стали применять особый круглый камешек с отверстием посередине. Греки называли его φῶρος (камешек), римляне — *rotula* (круглячок).

Аттическая нумерация была вытеснена у греков более компактной буквенной нумерацией, быть может, по примеру финикиян, алфавит которых, содержавший 22 знака для выражения согласных, положил начало почти всем известным буквенно-звуковым системам письма, в том числе еврейского, греческого, латинского, арабского и т. д. В финикийском алфавите, как и в произошедшем от него еврейском, 22 буквы. Из них первые девять букв обозначали единицы от 1 до 9, следующие девять букв — десятки от 10 до 90, остальные четыре буквы — сотни от 100 до 400. Финикияне обозначали сотни от 500 до 900 комбинациями последних четырех букв алфавита, числовые значения которых в сумме равны этим

	Грече- ское 1	Славянское		Еврей- ское 4	Сирий- ское 5	Араб- ское 6	Грузин- ское 7	Армян- ское 8
		Кирил- лицей 2	Глаго- лицей 3					
1	ā	ā	ⲁ	א	Ⲁ	ا	ს	Ա
2	β	β	Ⲃ	ב	ⲁ	ب	ზ	Բ
3	γ	γ	ⲃ	ג	Ⲃ	ج	ძ	Գ
4	δ	Δ	Ⲅ	ד	ⲃ	د	წ	Դ
5	ε	ε	ⲅ	ה	Ⲅ	ه	ჭ	Ե
6	ζ	ζ	Ⲇ	ו	ⲅ	و	ც	Զ
7	ζ	ζ	ⲇ	ז	Ⲇ	ز	ძ	Է
8	η	η	Ⲉ	ח	ⲇ	ح	ჩ	Ը
9	θ	θ	ⲉ	ט	Ⲉ	ط	ც	Թ
10	ι	Ι	Ⲋ	י	ⲉ	ط	ო	Ի
20	κ	κ	ⲋ	כ	Ⲋ	ك	პ	Լ
30	λ	λ	Ⲍ	ל	ⲋ	ل	მ	Լ
40	μ	μ	ⲍ	מ	Ⲍ	م	მ	Լ
50	ν	ν	Ⲏ	נ	ⲍ	ن	ბ	Ո
60	ξ	ξ	ⲏ	ס	Ⲏ	س	ვ	Կ
70	ο	ο	Ⲑ	ע	ⲏ	ع	გ	Զ
80	π	π	ⲑ	פ	ⲏ	ف	ღ	Զ
90	ρ	ρ	Ⲓ	צ	Ⲑ	ف	ყ	Դ
100	ρ	ρ	ⲓ	ק	ⲑ	ق	ჩ	Ը
200	σ	σ	Ⲕ	ר	Ⲓ	ر	ც	Թ
300	τ	τ	ⲕ	ש	ⲓ	س	ჭ	Ե
400	υ	υ	Ⲍ	ת	Ⲕ	ت	ც	Թ
500	φ	φ	ⲍ	ת	ⲕ	ت	ზ	Զ
600	χ	χ	Ⲏ	ת		ח	ძ	Է
700	ψ	ψ	ⲏ	ת		צ	ძ	Է
800	ω	ω	Ⲑ	ת		ס	ვ	Կ
900	θ	θ	ⲑ	ת		ט	ყ	Դ
1000	ā	ā	ⲁ	א		ا	ს	Ա
2000	β	β	Ⲃ			ب	ზ	Բ
3000	γ	γ	ⲃ			ج	ძ	Գ
4000	δ	Δ	Ⲅ			د	წ	Դ
5000	ε	ε	ⲅ			ه	ჭ	Ե
6000	ζ	ζ	Ⲇ			و	ც	Զ
7000	ζ	ζ	ⲇ			ز	ძ	Է
8000	η	η	Ⲉ			ح	ჩ	Ը
9000	θ	θ	ⲉ			ط	ც	Թ
10000	ι	Ι	Ⲋ			ط	ო	Ի
20000	κ	κ	ⲋ			ك		Լ

Алфавитное обозначение чисел

числам; евреи впоследствии для этих сотен использовали начертания пяти букв, применявшихся в конце слов.

Так как классический греческий алфавит содержит 24 буквы, греки использовали в буквенной нумерации три «архаические» буквы: вау, коппу и сампи, к VI в. до н. э. вышедшие из употребления. Для отличия букв, представляющих числа, над ними ставилась черточка. Попытки записать в алфавитной системе числа, большие 1000, привели к обозначениям, которые можно рассматривать как зачатки позиционной системы. Так, для обозначения 1000 применялась та же буква, что и для единицы, но снабженная черточкой слева внизу: $1 = \bar{\alpha}, 1000 = \bar{\alpha}$. Аналогично этому: $2000 = \bar{\beta}$, ..., $9000 = \bar{\theta}$. Таким образом греки могли обозначать числа до $10^4 - 1$, число 10^4 обозначалось знаком M , $2 \cdot 10^4 = \bar{M}$ и т. д. Однако окончательного перехода к позиционной системе счисления в Греции сделано не было. Впоследствии Архимед (см. стр. 128) дал способ наименования сколь угодно больших чисел, существенно дополнив тем самым ионийскую нумерацию.

В таблице (стр. 63) приведены алфавитные изображения чисел у греков, славян, евреев, сирийцев, арабов, грузин и армян.

Фалес

До нас дошли лишь отдельные фрагменты сочинений греческих ученых VI в. до н. э. О развитии науки в этот период можно судить по произведениям позднейших ученых, главным образом Платона и Аристотеля, и по «Началам» Евклида, в которых подведен итог основным математическим теориям трех предшествующих веков. Комментарии к «Началам» и некоторые небольшие отрывки из сочинений Гиппократы Хиосского и Архита Тарентского, переданные через третьи руки, позволяют воссоздать первые шаги нашей науки.

VI век до н. э. был временем знаменитых натурфилософских школ: ионийской и пифагорейской. Несколько позднее сложились не менее знаменитые учения Парменида, основателя элейской школы, Гераклита из Эфеса и Демокрита из Абдера, о которых мы еще будем далее говорить.

Начало греческой науки положила ионийская школа натурфилософии (первая половина VI в. до н. э.). Основателем ее был «отец греческой науки» Фалес — купец, политический деятель, философ, астроном и математик, живший в Милете — богатой греческой колонии в Малой Азии. К этой школе принадлежали также ученики Фалеса — Анаксимен и Анаксимандр.

Ионийцы, стоя на наивно материалистических позициях, пытались объяснить все многообразие мира, исходя из единого материального начала. Сам Фалес первоосновой всего сущего считал воду.

Неотъемлемой частью натурфилософии ионийцев были астрономия и математика. В этой школе впервые была высказана гипотеза, что Земля имеет форму цилиндра и висит посередине Вселенной (Анаксимандр). Фалес много путешествовал и был, по-видимому, знаком с астрономическими наблюдениями вавилонян. По сообщениям Геродота и Ксенофана, он предсказал солнечное затмение, которое и произошло во время битвы



Аристотель
(Рим. Национальный музей у Терм)

при Галисе между лидийцами и мидянами. Оба войска были настолько напуганы затмением, что поспешили заключить мир. Как теперь полагают, речь шла о солнечном затмении 585 г. до н. э. Анаксимандру приписывают составление первой географической карты и введение солнечных часов (гномона).

По сообщению Прокла (V в. н. э.; см. стр. 185), который сам опирался на не дошедшую до нас историю геометрии ученика Аристотеля Евдема Родосского (ок. 320 г. до н. э.), ионийцы первые среди эллинов занялись геометрией, причем Фалес 1) доказал, что диаметр делит круг пополам; 2) нашел предложение о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; 3) открыл, что при пересечении двух прямых получаются равные углы; 4) доказал теорему о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла. Последнюю теорему Евдем приписывает Фалесу на том основании, что она необходима для обоснования предложенного Фалесом способа определения расстояний до кораблей на море. По-видимому, способ заключался в следующем (рис. 10). Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B строился треугольник ABC с доступной точкой C , после чего прямые AC и BC продолжались по ту сторону точки C , и строился треугольник CDE такой, что $CD = AC$, $\angle ACB = \angle DCE$ и $\angle CDE = \angle CAB$. Тогда по теореме 4 $AB = DE$.

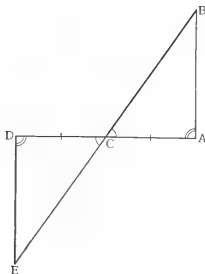


Рис. 10

К сожалению, мы ничего не знаем о доказательствах Фалеса. Видимо, он широко пользовался перегибанием и наложением фигур. Это подтверждается и словами Прокла: «Иногда он (Фалес. — И. Б.) рассматривал вопрос несколько общо, иногда более опираясь на наглядность»¹.

Школа Пифагора

Коренное преобразование математики по традиции единодушно приписывают Пифагору. Вот что пишет об этом Прокл: «Пифагор преобразовал эту науку в форму свободного образования. Он изучал эту науку, исходя из первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления, вне конкретных представлений. Он открыл теорию иррациональных (или пропорций) и построение пяти космических тел»², (т. е. правильных многогранников). Итак, Пифагору принадлежит первое построение геометрии как дедуктивной науки. К сожалению, до нас не дошли не только отрывки из математических сочинений Пифагора, но даже их переложения другими авторами.

Вот то смутное, что мы знаем о самом Пифагоре, личность которого уже в древности стала полулегендарной. Он родился на богатом торговом острове Самос и около 530 г. до н. э. переехал в Кротон (Южная Италия), где основал знаменитый пифагорейский союз, который преследовал не только научные, но и религиозно-этические и политические цели. Деятельность союза была окружена тайной, и все научные открытия, сделанные пифагорейцами, приписывались самому Пифагору. В начале V в. до н. э. после неудачного выступления на политической арене пифагорейцы были изгнаны из городов Южной Италии и союз прекратил свое существование.

Однако и после этого в Сибарисе, Кротоне, Таренте и других городах Великой Греции встречались замечательные ученые, которые называли себя пифагорейцами, и среди них такие, как Архит из Тарента и Феодор из Кирены.

Что касается творчества ранних пифагорейцев (до разгрома союза), то в настоящее время невозможно отделить сделанное самим Пифагором

¹ Proclus Diadochus. In primum Euclidis Elementorum librum commentarii, 1873, p. 65.

² Там же, p. 65—66.

от работ его учеников, поэтому мы будем просто говорить о математике пифагорейцев. Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел). В их школе возникло представление о шарообразности Земли и существовании множественности миров.

Мы не знаем, какие геометрические предложения пифагорейцы выбрали в качестве исходных и насколько велика была эта первая система аксиом. Содержание их геометрии сводилось в основном к планиметрии прямолинейных фигур (изучались свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов, сравнивались их площади и т. д.). Венчало их систему доказательство знаменитой «теоремы Пифагора», которая до этого была известна только для частных случаев. Трудно переоценить значение этой теоремы, обобщение которой и до сих пор лежит в основе определения всех метрических пространств. Об этой части учения пифагорейцев можно судить по первой книге «Начал» Евклида, в которой как раз и излагается весь перечисленный материал. Сообщение, что пифагорейцы открыли построение правильных многогранников (как теперь установлено, они знали три правильных тела из пяти; икосаэдр и октаэдр были, по-видимому, открыты Тезтетом), позволяет заключить, что они значительно продвинулись и в стереометрии.

Мы могли бы сомневаться в столь стремительном развитии геометрии, если бы до нас не дошли отрывки из сочинения замечательного математика середины V в. до н. э. Гиппократа Хиосского о квадратуемых луночках. Труд Гиппократа написан в том же стиле, в котором писали позднее Евклид и Архимед. При этом все планиметрические свойства прямолинейных фигур предполагаются хорошо известными (например, теорема о стороне треугольника, лежащей против тупого угла, и т. п.), тогда как свойства круга и хорд подробно обосновываются. Поскольку никакой другой математической школы, кроме пифагорейской, до Гиппократа не существовало, то все положения, которые Гиппократ считает общеизвестными, естественно приписать пифагорейцам.

Первоначально пифагорейцы полагали, что все отрезки соизмеримы, т. е. что отношение любых двух отрезков (а значит, и площадей прямолинейных фигур) можно выразить отношением целых чисел; таким образом, метрическая геометрия сводилась, по их мнению, к арифметике рациональных чисел.

Занимаясь гармонией, пифагорейцы пришли к выводу, что и качественные отличия звуков обуславливаются чисто количественными различиями длин струн или флейт. Так, если длины струн относятся, как 1 : 2; 3 : 2 и 4 : 3, т. е. разница в тонах будет октавой, квинтой или квартой, музыкальные интервалы благозвучны (консонантны), в других же случаях эти интервалы неблагозвучны (диссонантны). Таким образом, здесь дело сводилось к целым числам и их отношениям.

Это привело пифагорейцев к мысли, что все закономерности мира можно выразить с помощью чисел, что «элементы чисел являются элементами всех вещей и что весь мир в целом является гармонией и числом»¹. Отсюда исключительный интерес пифагорейцев к основе основ — арифметике, с помощью которой можно выразить все отношения между вещами и построить модель мира.

¹ Аристотель. Метафизика. Перевод и примечания А. В. Кубицкого. М.—Л., 1934, стр. 26—27.

Пифагореец Архит писал: «Арифметика, по [моему] мнению, среди прочих наук весьма выделяется совершенством знания; да и геометрии [она совершеннее, так как] она яснее, чем геометрия, рассматривает любой [предмет]»¹.

Арифметика целых чисел

Число для пифагорейцев — это собрание единиц, т. е. только целое положительное число. Единицы, составляющие число, считались неделимыми и изображались точками, которые пифагорейцы располагали в виде правильных геометрических тел, получая ряды «треугольных», «квадратных», «пятиугольных» и других «фигурных» чисел. Каждый такой ряд представляет последовательные суммы арифметической прогрессии с разностями 1, 2, 3 и т. д.

На рис. 11 изображены «треугольные» числа 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$ (общее выражение этих чисел $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$).

На рис. 12 показаны «квадратные» числа 1, $1+3=4$, $1+3+5=9$ (общее выражение этих чисел $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$; наше выражение «квадрат» для числа n^2 является пережитком пифагорейской терминологии).

На рис. 13 изображены «пятиугольные» числа 1, $1+4=5$, $1+4+7=12$ (общее выражение этих чисел $1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$).

Пифагорейцы определили также «кубические» числа 1, 8, 27, ... (откуда наше выражение «куб» для n^3); «пирамидальные» числа — суммы треугольных чисел

$$1, 1+3=4, 1+3+6=10, \dots, 1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot3}.$$

Изучая свойства чисел, пифагорейцы первые обратили внимание на законы их делимости. Они разбили все числа на четные и нечетные и, что очень важно, на простые и составные. Пифагорейцы называли составные числа, представимые в виде произведения двух сомножителей, «плоскими числами» и изображали их в виде прямоугольников, а составные числа, представимые в виде произведения трех сомножителей, — «телесными числами» и изображали их в виде параллелепипедов. Простые числа, которые нельзя представить в виде произведений, они называли «линейными числами». Пифагорейцы создали так называемое учение о четных и нечетных числах, которое с современной точки зрения является теорией делимости на 2. Построенная ими теория была впоследствии воспроизведена Евклидом в 21—34-м предложениях IX книги «Начал»². Она представляет одну из наиболее архаичных частей «Начал», причем помещена там уже после того, как в VII книге была построена общая теория делимости, содержащая как частный случай и теорию делимости на 2. Включение в «Начала» этого чужеродного тела, очевидно, — дань уважения к наиболее древней теоретико-числовой теории.

¹ А. О. Маковельский. Досократики, вып. III. Казань, 1915, стр. 57.

² Далее при ссылках на предложения «Начал» номер книги указывается римскими цифрами, а номер предложения — арабскими.

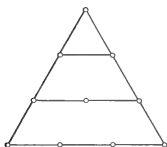


Рис. 11

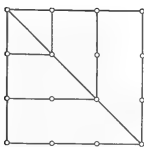


Рис. 12

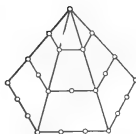


Рис. 13

Основной результат учения о четных и нечетных числах можно сформулировать так: произведение двух чисел делится на 2 (т. е. четно) тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на 2. Отсюда следует, что любое целое число N можно однозначно представить в виде $N = 2^k N_1$, где N_1 — нечетно. Удивительно, что предложение, которое и в наши дни большинству людей представляется очевидным, было так рано обосновано. Еще удивительнее, что была понята необходимость его обоснования.

Нам известно и несколько теоретико-числовых задач, которыми занимались пифагорейцы. Это, прежде всего, задача о нахождении совершенных чисел, т. е. таких, которые равны сумме своих делителей (исключая само число), как, например, $6 = 1 + 2 + 3$ или $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

После изложения учения о четных и нечетных числах в «Началах» доказывается (IX, 36), что если $1 + 2 + \dots + 2^n = p$ — простое число, то $2^n p$ будет числом совершенным. Доказательство этого предложения можно провести, опираясь только на учение о четных и нечетных. Вполне вероятно, что оно восходит к пифагорейцам. Эйлер в XVIII в. доказал, что никаких других четных совершенных чисел, кроме указанных в теореме Евклида, не существует. Однако вопрос о том, имеется ли конечное или бесконечное число совершенных чисел, до сих пор не решен, а также не найдено ни одного нечетного совершенного числа и не доказано, что таких чисел не существует.

Пифагорейцы исследовали неопределенное уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

целые решения которого поэтому называют «пифагоровыми тройками», и нашли бесконечно много таких троек, имеющих вид

$$x = \frac{1}{2}(m^2 - 1), \quad y = m, \quad z = \frac{1}{2}(m^2 + 1).$$

Правила, которые мы записываем формулами

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta, \quad z = \xi^2 + \eta^2$$

и которые охватывают всю совокупность решений этого уравнения, встречаются у Диофанта, но должны были быть известны задолго до него.

Ранние пифагорейцы связывали с целыми числами и различные мистические спекуляции. Так, особенно совершенным представилось им число 10 — декада, так как $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, но 1 есть единица (монада), мать всех чисел, 2 выражает линию, 3 — треугольник, а 4 — пирамиду. Это древнее рассуждение замечательно тем, что числа 2, 3 и 4 связываются с размерностью геометрических образов. Две точки определяют прямую — это одномерный образ, три точки (не лежащие на одной прямой) — треугольник или плоскость — двумерный образ; наконец, 4 точки (не лежащие в одной плоскости) — пирамиду — трехмерный образ. Кроме того, среди чисел, меньших 10, столько же простых, сколько составных, и т. д. Исходя из замечательных свойств декады, пифагорейцы считали, что число небесных сфер должно быть равно 10, а так как их насчитывали только 9 (сферы неба, Солнца, Луны, Земли, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна), то была придумана новая планета — Противоземле, которая вращалась по десятой сфере. Аналогичные мистические спекуляции с числами были распространены и среди ученых XV—XVI вв., и вообще они характерны для ранних стадий развития науки.

Арифметика дробей и первая теория отношений

Об учении пифагорейцев о рациональных числах нам известно еще меньше, чем об их теории целых чисел. Мы можем только с уверенностью утверждать, что такое учение существовало: на нем основывалась вся теория подобия, и им широко пользовался в своих работах Гиппократ Хиосский. Это раннее учение не могло совпадать с тем, которое изложено в VII—IX книгах «Начал» Евклида, потому что последнее опиралось на общие законы делимости целых чисел, особенно на теорему о том, что произведение двух целых чисел делится на простое число тогда и только тогда, когда на него делится по крайней мере один из сомножителей. Но эта теорема была, вероятнее всего, установлена только Теэтетом, о чем мы будем говорить дальше. При этом VII книга принадлежит, по-видимому, самому Теэтету, а VIII, как показал ван дер Варден, — Архиту. Поскольку восстановить сейчас раннее учение о рациональных числах невозможно, мы изложим его, следуя Евклиду.

Важнейшим свойством рациональных чисел, в отличие от целых, является то, что в области рациональных чисел деление всегда возможно, т. е. уравнение $ax = b$, где a и b — рациональные и $a \neq 0$, всегда имеет решение. Области, в которых беспрепятственно выполнимы все четыре действия арифметики, называют теперь полями. Наши рациональные числа образуют поле. Посмотрим, какие числовые области рассматривались в древности.

Хотя в догреческой математике и была развита техника вычисления с дробями, однако никакого поля построено не было. Действительно, египтяне оперировали только с основными дробями вида $1/n$ (и $2/3$). Но очевидно, что сумма и частное таких дробей уже не являются основной дробью. Результат деления двух чисел представлялся, вообще говоря, не основной дробью, а суммой конечного числа таких дробей. В Вавилоне оперировали с шестидесятеричными дробями, поэтому может показаться, что здесь дело обстоит так же, как и у нас, когда мы применяли десятичные дроби. Однако вавилоняне оперировали только с конечными шестидесятеричными

ми дробями, а в такой области деление не всегда выполнимо, например $1/7$ уже нельзя представить в таком виде. Таким образом, в системе вавилонян величина $1/7$ была столь же «невыразимой», как и $\sqrt{7}$.

Только в Греции начали оперировать с дробями вида m/n , причем умели производить с ними все действия арифметики с тем ограничением, что вычитать можно было лишь из большего меньшее. Сложение и вычитание производились путем приведения к общему знаменателю, дроби умели сокращать, умножать и делить.

Не позднее V в. до н. э. появились и первые теоретические исследования, посвященные этим новым объектам. Что следует понимать под m/n ? Точнее, как определить в общем случае равенство или неравенство двух таких объектов и как ввести для них арифметические операции? В настоящее время способ построения таких новых объектов хорошо известен. Описание его имеется в любом полном курсе алгебры, но тогда ученые столкнулись с такой проблемой впервые. Тем более замечательно, что они нашли для ее решения именно те пути, которым мы следуем до сих пор.

Греки исходили из того, что единица E неделима, поэтому они говорили не о долях единицы $\frac{m}{n}E$, а об отношениях целых чисел $\frac{mE}{nE} = \frac{M}{N}$, т. е. в сущности имели в виду пары целых чисел. На этом и было основано применение теории отношений к теории музыки: всякому музыкальному интервалу, т. е. паре звуков, ставили в соответствие отношение высот этих звуков, т. е. пару (A, B) целых чисел, измеряющих эти высоты звуков. Согласно VII книге «Начал» две пары чисел (A, B) и (C, D) пропорциональны или имеют одинаковое отношение, если у A и B существует такой общий делитель F , а у C и D — делитель G , что

$$\begin{aligned} A &= mF, & C &= mG, \\ B &= nF, & D &= nG. \end{aligned}$$

В частности, одно из чисел, m или n , могло равняться единице.

Разумеется, уже пифагорейцы знали, что отношение пропорциональности транзитивно, т. е. из пропорциональности пар (A, B) и (C, D) и пропорциональности пар (C, D) и (E, F) вытекает пропорциональность пар (A, B) и (E, F) , и, следовательно, отношение пропорциональности является отношением типа равенства. Этим пользовались и Гиппократ Хиосский и Архит. Однако вряд ли это было обоснованно, даже в «Началах» соответствующее доказательство отсутствует. Это тем более странно, что для пропорциональности отношений величин транзитивность строго доказывается («Начала», предложение — V, 11).

Итак, все пары целых чисел разбивались на непересекающиеся классы пар, имеющих одно и то же отношение:

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3 = \dots$$

С нашей точки зрения, каждому такому классу можно поставить в соответствие новый объект — рациональное число. Древние выражали это иначе: они не вводили понятия класса, а выбирали из множества пар, имеющих одинаковое отношение, наименьшую пару A_0, B_0 , относительно которой доказывали:

- 1) если $A : B = A_0 : B_0$, то $A = kA_0, B = kB_0$ (предложение VII, 20);
- 2) если A_0, B_0 взаимно просты, то они составляют наименьшую пару из всех, имеющих с ней одинаковое отношение (предложение VII, 21);

3) если A_0, B_0 составляют наименьшую пару, то они между собой взаимно просты (предложение VII,22).

Отсюда видно, что наименьшая пара полностью характеризовала класс, к которому принадлежала. Заметим еще, что понятие наименьшей пары в точности соответствует нашему понятию несократимой дроби.

Как видно, вся эта теория пар основывается на понятиях из общей теории делимости — общий делитель двух чисел, взаимная простота двух чисел и т. п. В основе всех этих понятий и большей части доказательств лежит алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел, называемый в настоящее время алгоритмом Евклида.

В «Началах» над отношениями целых чисел производится только одна операция — составление отношений, которая соответствует умножению дробей. Отношение $A:C$ называется составленным из отношений $A:B$ и $B:C$, что мы будем далее записывать в виде $(A:B) \otimes (B:C) = (A:C)$. Это название объясняется, вероятно, тем, что при составлении музыкальных интервалов, т. е. при переходе от интервалов, представляющих собой пары звуков с высотами A, B и B, C , к интервалу, представляющему пару звуков с высотами A, C , происходит составление соответственных отношений. В предложении VII,14 «Начал» доказывается, что если $A:B = F:G$ и $B:C = G:H$, то $A:C = F:H$, т. е. результат составления зависит не от того, каких представителей мы выбираем в классах пар, к которым принадлежат $A:B$ и $B:C$, а только от самих этих классов. Таким образом, операция составления определена для классов пар, имеющих одинаковое отношение. (Это, пожалуй, первый известный нам пример фактор-закона композиции, перенесенного с элементов на классы.)

В VIII книге «Начал» показывается, как составить любые отношения $A:B$ и $C:D$. Для этого строятся такие наименьшие числа F, G, H , что $A:B = F:G$ и $C:D = G:H$, тогда

$$(A:B) \otimes (C:D) = (F:G) \otimes (G:H) = (F:H)$$

(предложение VIII, 4—5). Кроме того, операция составления отношений связывается с операцией умножения целых чисел, а именно в предложении VIII, 5 доказывается, что $(A_1A_2:B_1B_2) = (A_1:B_1) \otimes (A_2:B_2)$.

Заметим еще, что в «Началах» дается алгоритм нахождения общего наименьшего кратного (предложения VII,34 и VII, 36), что, очевидно, необходимо для операции, соответствующей сложению дробей, но сама эта операция в теоретических сочинениях греков не употребляется.

Мы видим, с какой удивительной строгостью, общностью и глубоким пониманием существа проблемы была построена древними первая теория пар и введен закон композиции для этих новых объектов.

Мы очертили основные контуры первоначальной математической системы пифагорейцев, которая одновременно была первой математической моделью мира. Однако в самой пифагорейской школе вскоре было сделано открытие, которое показало несостоятельность этой модели.

Несоизмеримость

Открытие несоизмеримых отрезков явилось поворотным пунктом в развитии математики. Оно разрушило раннюю систему пифагорейцев и привело к созданию новых, очень тонких и глубоких теорий. Значение этого

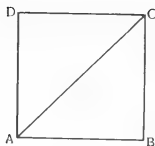


Рис. 14

открытия можно, пожалуй, сравнить только с открытием неевклидовой геометрии в XIX в. или теории относительности в начале XX в. Так же как и эти теории, проблема несоизмеримости получила громкую известность среди широких кругов образованных людей. Платон и Аристотель неоднократно обсуждали вопросы, связанные с несоизмеримостью. Это-то и помогает нам восстановить, как и когда было сделано это замечательное открытие.

В «Первой аналитике» Аристотель писал, что если допустить соизмеримость диагонали и стороны квадрата, то нечетное число было бы равно четному. Из этой фразы ясно, что доказательство проводилось методом от противного. Такое доказательство, опирающееся только на учение о четных и нечетных числах, имеется в некоторых списках в самом конце X книги «Начал» Евклида. Есть все основания предполагать, что это и есть древнее пифагорейское доказательство. Вот оно. Допустим, что диагональ квадрата AC и его сторона AB соизмеримы (рис. 14), т. е. их отношение равно отношению двух целых чисел:

$$AC : AB = m : n. \quad (1)$$

Предполагается, что числа m и n не являются оба четными, иначе дробь можно было бы сократить на два. Из (1) следует, что

$$AC^2 : AB^2 = m^2 : n^2.$$

Но по теореме Пифагора $AC^2 = 2AB^2$; следовательно, и

$$m^2 = 2n^2. \quad (2)$$

Значит, m^2 — четно. Из учения о четных и нечетных числах следует, что в этом случае и m — четно (так как произведение двух нечетных чисел нечетно). Но тогда n — нечетно. Поскольку m — четно, то $m = 2l$. Подставляя в (2), получим

$$4l^2 = 2n^2,$$

или $n^2 = 2l^2$, т. е. n^2 — четно, следовательно и n должно быть четным, что приводит к противоречию.

Открытие несоизмеримости означало, что целых чисел и их отношений недостаточно для выражения отношений любых двух отрезков, что с помощью одних только рациональных чисел нельзя строить метрическую геометрию.

Это поразило греков. В диалоге Платона «Законы» Афинянин говорит, что поздно узнал о несоизмеримости и что до этого он был подобен неразумному животному. Аристотель писал в «Метафизике»: «... все начинают с изумления, обстоит ли дело именно так, как „недоумевают“, например, про загадочные самодвижущиеся игрушки, или „сходным образом“ в отношении солнцеворотов, или несоизмеримости диагонали; ибо у всех, „кто еще не рассмотрел причину“, вызывает удивление, если что-нибудь нельзя измерить самой малою мерою»¹.

Первые иррациональности

Вскоре обнаружилось, что диагональ и сторона квадрата не составляют исключения. Согласно диалогу Платона «Теэтет», пифагореец Феодор из Кирены доказал, что стороны квадратов с площадями 3, 5, 6, 7, ..., 17 несоизмеримы со стороной единичного квадрата. Нам неизвестно, как проводил доказательства Феодор, но ясно, что он рассматривал каждый случай отдельно.

Существует несколько гипотез (по крайней мере четыре) о том, как доказывал Феодор и почему он остановился на $\sqrt{17}$. Ж. Итар недавно показал, что все доказательства Феодора можно провести с помощью одного только учения о четных и нечетных числах и что первое число, для которого этот способ не проходит, и есть как раз 17. Поясним (в современных терминах) суть дела. Будем говорить, что два целых числа a, b сравнимы по целому модулю, а писать $a \equiv b \pmod{m}$, если разность $a - b$ делится на m нацело. Если найдется такое рациональное число $\frac{p}{q}$, что $\frac{p^2}{q^2} = N$, то возможно равенство $p^2 = Nq^2$; значит, тем более будет разрешимо сравнение $p^2 \equiv Nq^2$ по любому модулю. Если же это сравнение или равносильное ему сравнение $z^2 \equiv N$ не разрешимо по какому-нибудь модулю, то отсюда следует невозможность равенства $p^2 = Nq^2$. Метод древних, согласно Итару, был эквивалентен рассмотрению сравнений $z^2 \equiv N$ по модулям 2, 4 и 8 (легко показать, что если сравнение $z^2 \equiv N$ разрешимо по модулю 2^k при $k = 1, 2, 3$, то оно будет разрешимым и при любом k). Феодор мог без труда показать, что при $N = 3, 5, \dots, 15$ сравнение $z^2 \equiv N$ не разрешимо по одному из модулей 2, 2^2 или 2^3 . Однако при $N = 17$ этот метод оказывался недостаточным, так как сравнение $z^2 \equiv 17 \pmod{2^k}$ разрешимо при любом k и никакого заключения относительно возможности равенства $p^2 = 17q^2$ сделать нельзя.

Как бы то ни было, учение о четных и нечетных числах могло иметь гораздо более широкое применение, чем это казалось раньше.

Классификация иррациональностей Теэтета

Согласно Платону, первое общее учение об иррациональностях принадлежит юному ученику Феодора — Теэтету. Беседуя о нем с Сократом, Феодор говорит: «Из всех молодых людей, с которыми мне когда-либо приходилось встречаться (а их довольно много бывало у меня), я не знал ни одного такой удивительной одаренности. Легко воспринимает учение,

¹ Аристотель. Метафизика, стр. 22.

как редко кто другой, при этом необыкновенной мягкости характера и вместе с тем мужествен, как никто...»¹. Далее, мы узнаем, что Теэтет сумел общим образом охарактеризовать первый бесконечный класс иррациональностей, а именно таких, которые мы теперь обозначаем $\sqrt{N}$, где N — целое число, не являющееся полным квадратом. Ему принадлежит, по-видимому, следующая замечательная теорема: если площадь квадрата выражается целым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной единичного квадрата.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на основное предположение теории делимости: произведение двух целых чисел AB делится на простое число P тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на P . На основании этого предложения иррациональность $\sqrt{N}$, если N не является полным квадратом, доказывается точно так же, как и иррациональность $\sqrt{2}$. Если бы Феодор владел общей теорией делимости, он без труда смог бы провести доказательство для любого N и ему не нужно было бы перебирать одно число за другим вплоть до $N = 17$ и придумывать новый, отнюдь не более легкий способ доказательства.

Таким образом, можно почти точно датировать возникновение общей теории делимости. Она была уже создана в год смерти Сократа (399 г. до н. э.) и творцом ее, по-видимому, был Теэтет.

Охарактеризовав «отрезки, соизмеримые в степени» (т. е. в квадрате), Теэтет показал, что точно так же можно выделить класс отрезков, соизмеримых только в кубе с основной единицей ($\sqrt[3]{N}$). Метод Теэтета может быть распространен для доказательства иррациональности $\sqrt[k]{N}$, если N не является k -й степенью никакого целого числа.

Теэтет продолжил исследование несоизмеримых отрезков, образовав классы биномалей $\sqrt{N} + \sqrt{M}$ или $N + \sqrt{M}$, апотом («вычетов») $\sqrt{N} - \sqrt{M}$, $N - \sqrt{M}$ или $\sqrt{N} - M$ и медиалей («средних») $\sqrt{\sqrt{M} \cdot \sqrt{N}}$.

Дальнейшая классификация иррациональностей и изложение результатов Теэтета содержится в X книге «Начал» Евклида.

Теория делимости

Общая теория делимости дошла до нас в изложении Евклида (книга VII и часть книги IX). В основе ее лежит алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел (алгоритм Евклида). Если A и B — целые ($A > B$), то этот алгоритм состоит в представлении A в виде

$$A = nB + B_1,$$

где $0 \leq B_1 < B$, затем B в виде

$$B = n_1 B_1 + B_2,$$

где $0 \leq B_2 < B_1$, и т. д. Процесс не может быть бесконечным, так как существует лишь конечное число целых чисел, меньших B . Таким образом,

¹ Платон. Теэтет. Перевод В. Сerezникова. М.—Л., 1936, стр. 12—13.

через конечное число шагов мы придем к такому остатку B_k , что $B_{k-1} = n_k B_k$; B_k и будет общим наибольшим делителем чисел A и B .

Заметим, что, так как

$$\frac{A}{B} = n + \frac{1}{\frac{B}{B_1}} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{\frac{B_1}{B_2}}} = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\frac{B_2}{B_3}}}} = \dots,$$

в ходе этих делений получаются последовательные неполные частные $n; n_1, n_2, \dots, n_m$ разложения рационального числа $\frac{A}{B}$ в непрерывную дробь

$$\frac{A}{B} = n; n_1, n_2, \dots, n_m, \dots = n + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots + \frac{1}{n_m} + \dots}}.$$

Это замечание нам пригодится в дальнейшем. Однако сами древние не выделяли понятия непрерывной дроби, это произошло лишь в Новое время.

После введения этого алгоритма, можно уже вполне строго доказать основную теорему теории делимости.

Произведение двух чисел AB делится на простое число P тогда и только тогда, когда на P делится по крайней мере один из сомножителей. Это и есть предложение VII,30 «Начал». В предложении VII,32 доказывается, кроме того, что любое число или просто, или делится на какое-нибудь простое. Отсюда следует, что любое A представимо в виде

$$A = P_1 P_2 \dots P_k,$$

где P_i — простые. Наконец, в предложении IX, 14 доказывается, что если все сомножители различны, то такое представление единственно. Случай $A = P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}$, где не все α_i равны 1, в «Началах» не рассматривается, вероятно, потому, что без алгебраической символики разбор этого случая был бы весьма громоздким.

Закон однозначности разложения на простые множители является основой всей арифметики целых чисел.

В XIX в. при попытках построить арифметику целых чисел поля $K = Q(\theta)$, где Q — поле рациональных чисел, а θ — корень неприводимого над Q алгебраического уравнения с целыми коэффициентами и коэффициентом 1 при старшем члене, математики столкнулись с большими трудностями. Дело в том, что закон однозначности разложения на простые множители для этих чисел не выполнялся! Поясним сказанное на примере целых чисел поля $Q(\sqrt{-5})$, которые имеют вид $m + n\sqrt{-5}$, где m, n — целые рациональные. Легко видеть, что они образуют кольцо $Z[\sqrt{-5}]$, где Z — кольцо целых рациональных чисел. Число α этого кольца назовем простым, если его нельзя представить в виде произведения двух чисел $\beta\gamma$ того же кольца, отличных от единицы. Но при таком, казалось бы, естественном определении закон однозначности не выполняется. Действительно,

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}),$$

причем $2, 3, 1 + \sqrt{-5}$ и $1 - \sqrt{-5}$ являются в $Z[\sqrt{-5}]$ простыми в определенном выше смысле.

Это обстоятельство, не позволявшее построить в кольцах целых алгебраических чисел арифметику, аналогичную обычной, побудило Куммера, Золотарева, Дедекинда, Кронекера и других математиков по-новому определить само понятие простого числа. Они пришли к мысли, что основным, определяющим свойством простого числа является не то, что оно не разлагается в произведение двух множителей, а то, что доказали и древние греки: произведение двух чисел делится на простое число в том и только том случае, если на него делится хотя бы один из сомножителей. В частности, раз произведение $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ делится на 3, хотя ни один из сомножителей на 3 не делится, то 3 не может рассматриваться как простое число кольца $Z[\sqrt{-5}]$. Для восстановления закона однозначности в кольцах алгебраических чисел были введены новые элементы: идеальные множители, по терминологии Куммера и Золотарева, или идеалы Дедекинда. Только после этого стало возможным строить арифметику таких колец. Тем более удивительно, что в античной Греции, в которой рассматривались только целые рациональные числа, теория делимости была построена с безупречной строгостью. Эта теория — одно из наиболее выдающихся достижений греческой математики.

Первый критерий несоизмеримости

По-видимому, к Теэтету восходит идея применить алгоритм Евклида (мы будем продолжать называть его этим именем) в качестве критерия для установления несоизмеримости двух отрезков. Если отрезки a и b соизмеримы, то можно показать, что, применяя к ним алгоритм Евклида, мы найдем в конечном числе шагов их наибольшую общую меру. Значит, если алгоритм окажется бесконечным, то отрезки не могут иметь никакой общей меры. Этот критерий доказывается в предложении X, 2 «Начал».

Обычно некоторый отрезок выбирался в качестве единичного e и все остальные рассматривались по отношению к нему. Критерий эффективен, если он применяется к отрезку b , квадрат на котором соизмерим с единичным квадратом, т. е. в наших обозначениях b имеет вид $\sqrt{n}$. Действительно, в этом случае после применения конечного числа раз алгоритма Евклида мы приходим к двум таким отрезкам a' и b' , что $b' : a' = b : e$, и последовательные остатки будут повторяться. Это соответствует тому, что непрерывная дробь, в которую раскладывается отношение $b : e$, периодична. Возможно, что данный критерий был известен еще до Теэтета и что Феодор как раз с его помощью доказывал несоизмеримость сторон квадратов с площадями 3, 5, ..., 17 со стороной единичного квадрата. Как бы то ни было, Теэтет первый заметил в этом критерии нечто большее и, как мы увидим, попытался с его помощью обосновать общую теорию отношений.

Интересно отметить, что и впоследствии непрерывные дроби служили орудием для установления иррациональности некоторых чисел. Именно с их помощью Ламберт установил иррациональность e^x , $\operatorname{tg} x$, $\ln x$ и $\arctg x$ для рациональных x и, в частности, иррациональность чисел e и π (см. т. III, гл. 3).

Геометрическая алгебра

Открытие несоизмеримости явилось причиной того, что в греческой математике, и притом в самой пифагорейской школе, обратили внимание на соотношение между геометрией и арифметикой. Арифметика, как мы говорили, базировалась на понятии целого числа. Рациональные числа мыслились, как пары целых. После того как выяснилось, что отношение двух отрезков, вообще говоря, не может быть выражено с помощью отношения целых чисел, математическая система пифагорейцев была разрушена.

Естественно, что начались интенсивные поиски путей выхода из кризиса. Для этого априори представлялось несколько возможностей: 1) расширить понятие числа так, чтобы с помощью новых чисел можно было характеризовать отношение любых двух отрезков; 2) строить математику не на основе арифметики рациональных чисел, а на основе геометрии, определив непосредственно для геометрических величин все операции алгебры; 3) отказаться от строго логического построения учения о несоизмеримых величинах и перейти к нестрогому оперированию с иррациональными (как это делалось впоследствии в Индии и в средневековой Европе).

Третий путь был неприемлем для греков — он означал отказ от основной идеи дедуктивного построения математики.

Первый путь на столь ранней стадии развития представлял громадные трудности. Даже те первые попытки, которые были сделаны в конце V и начале IV в., окончились неудачей. Практически он был закрыт для ранних пифагорейцев.

И они пошли по второму пути. Это была ошибка в стратегии, хотя на первых порах античная математика получила большие тактические преимущества. Построение алгебры на основе геометрии впервые позволило обосновывать общим образом некоторые теоремы и правила алгебры, однако при дальнейшем развитии геометрическое облачение, как панцирь, сковало живое тело античной математики. Оно мешало гармоничному развитию отдельных частей математики, делало ее громоздкой и малоподвижной. Геометрическая броня античной математики походила на внешний скелет панцирных животных, который при дальнейшей эволюции был заменен внутренним скелетом.

Уже в самой пифагорейской школе началось построение алгебры на основе геометрии — так называемой геометрической алгебры. Вслед за тем геометрический язык стал применяться в теории чисел: изображение чисел точками, расположенными в виде правильных фигур, было оставлено, теперь все числа представлялись отрезками, полученными повторением конечное число раз отрезка, принятого за единицу. Наконец, на этой же основе получил развитие и «математический анализ» древних.

Основными объектами геометрической алгебры были отрезки и прямоугольники, а также параллелепипеды. Сложение отрезков осуществлялось путем приставления одного к другому, вычитание — путем выкидывания из большего отрезка части, равной меньшему. Операция вычитания была возможна лишь тогда, когда вычитаемое не превосходило уменьшаемого.

Произведением двух отрезков назывался построенный на них прямоугольник. Разумеется, не имело смысла говорить о сложении прямоугольников и отрезков. Поэтому исчисление, определенное в геометрической алгебре, было ступенчатым.



Рис. 15

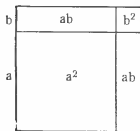


Рис. 16

Мы знаем геометрическую алгебру по ее изложению во II книге «Начал» Евклида и по произведениям Архимеда и Аполлония, которые пользовались ею так же, как мы теперь пользуемся буквенной алгеброй.

В первом же предложении II книги «Начал» доказывается, что прямоугольник, заключенный между двумя отрезками, будет равен сумме прямоугольников, заключенных между одним из этих отрезков и частями, на которые рассечен второй (рис. 15), т. е. если $a = a_1 + a_2 + a_3$, то

$$b(a_1 + a_2 + a_3) = ba_1 + ba_2 + ba_3.$$

С нашей точки зрения, это предложение устанавливает дистрибутивность умножения по отношению к сложению. Уже здесь видно преимущество геометрической алгебры. Доказательство происходит независимо от того, будут ли отрезки a , b или части a_1 , a_2 , a_3 соизмеримыми или несоизмеримыми, и независимо от конкретных величин этих отрезков. Геометрическая алгебра позволила, таким образом, впервые доказать, и притом совершенно общим образом, некоторые свойства алгебраических операций. Она позволила также установить важные тождества, как-то (предложение II, 4) (рис. 16):

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Однако все эти тождества устанавливались только для величин двух измерений. Для представления произведения трех величин нужно было пользоваться пространственными фигурами, а произведение четырех и более отрезков уже не могло быть представлено аналогичным образом в рамках трехмерного пространства.

Геометрическая алгебра основывалась на античной планиметрии, представлявшей собой геометрию циркуля и линейки. Поэтому она была максимально приспособлена для исследования тождеств, обе части которых являются квадратичными формами, и для решения квадратных уравнений. Этим и ограничивалось, по существу, поле ее приложений.

Задачи, эквивалентные квадратным уравнениям, легко формулируются геометрически. Древние рассматривали три типа таких задач.

1. Преобразовать заданный прямоугольник в квадрат (т. е. решить уравнение $x^2 = ab$).

2. Приложить к заданному отрезку a прямоугольник данной площади S так, чтобы «недостаток» был квадратом. Это значит, что нужно построить на отрезке AB прямоугольник AA_1C_1C , равный S , так, чтобы «недостаток» CBB_1C_1 был квадратом (рис. 17).

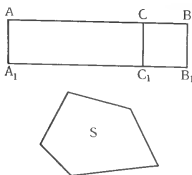


Рис. 17

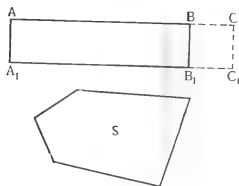


Рис. 18

Если обозначить CB через x , то мы снова придем к квадратному уравнению

$$x(a - x) = S.$$

В древности эта задача получила название эллиптической от слова *ἐλλειψις* — недостаток. В «Началах» отмечается, что задача возможна при $S \leq a^2/4$, поскольку $S \leq \max_{0 \leq x \leq a} x(a - x) = \frac{a^2}{4}$.

3. Третья задача двойственна второй: к данному отрезку a требовалось приложить прямоугольник с заданной площадью S так, чтобы «избыток» (*ὑπερβολή*) был квадратом (рис. 18). Нетрудно видеть, что задача эквивалентна уравнению

$$x(a + x) = S.$$

Напомним, что при построении геометрической алгебры учение об отношениях не предполагалось известным, т. е. первую из задач нельзя было решать путем вставки среднего пропорционального между отрезками a и b :

$$a : x = x : b.$$

Поэтому задачи 1–3 решались путем преобразования произведений ab , $x(a - x)$ и $x(a + x)$ в разность квадратов, для чего применялось тождество

$$ab = \frac{(a + b)^2}{2} - \frac{(a - b)^2}{2},$$

которое, разумеется, устанавливалось геометрически. После такого преобразования неизвестная величина находилась по теореме Пифагора. Для первого случая, например,

$$x^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2,$$

т. е. x есть катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $(a + b)/2$, а другой катет $(a - b)/2$. Аналогично решались и задачи 2, 3. Насколько хорошо греки овладели методами геометрической алгебры, видно из сочинений Архимеда и Аполлония, с которыми нам еще предстоит познакомиться.

Алгебра древних и геометрия циркуля и линейки

Мы видели, что задачи, эквивалентные квадратным уравнениям, в античной математике решались с помощью циркуля и линейки. Нетрудно показать, что и, наоборот, все задачи на построение с помощью циркуля и линейки алгебраически эквивалентны решению конечной цепочки квадратных уравнений. Действительно, все такие построения состоят из следующих элементов: 1) проведение прямой через две точки, 2) нахождение точки пересечения двух прямых, 3) прямой и окружности, 4) двух окружностей. Все эти точки пересечения можно найти решением либо линейного, либо квадратного уравнения.

Пусть исходные величины лежат в некотором поле K . Решение линейного уравнения не выведет нас из этого поля. При решении квадратного уравнения

$$x^2 + ax = b \quad (1)$$

мы получим, вообще говоря, величины, не принадлежащие исходному полю

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} = p \pm \sqrt{q}.$$

Наименьшим полем, содержащим корни уравнения (1), будет поле, состоящее из величин $a + b\sqrt{q}$, где a, b принадлежат полю K . Будем обозначать такое поле $K_1 = K(\sqrt{q})$ и называть его расширением поля, полученным присоединением к нему элемента $\sqrt{q}$.

При дальнейших построениях мы будем оперировать уже с элементами из K_1 . Если нам снова придется решать квадратное уравнение

$$x^2 + a_1x = b_1, \quad (2)$$

где a_1, b_1 из K_1 , то корни его

$$x_{1,2} = p_1 \pm \sqrt{q_1} = r + s\sqrt{q} \pm \sqrt{\bar{r} + \bar{s}\sqrt{q}}, \quad \text{где } r, s, \bar{r}, \bar{s}, q \in K$$

уже, вообще говоря, не лежат в K_1 . Присоединяя $\sqrt{q_1}$ к K_1 , получим новое минимальное поле $K_2 = K_1(\sqrt{q_1})$, в котором лежат корни (2), и т. д. Таким образом, каждому построению в геометрии Евклида будет отвечать конечная цепочка квадратных уравнений (линейные можно не учитывать):

$$\begin{array}{ll} x^2 + ax = b, & a, b \in K, \\ x^2 + a_1x = b_1, & a_1, b_1 \in K_1, \\ \dots & \dots \\ x^2 + a_nx = b_n, & a_n, b_n \in K_n, \end{array}$$

причем коэффициенты каждого последующего уравнения принадлежат полю, содержащему корни предыдущего. Мы предполагаем, кроме того, что корни всех уравнений действительны. Будем называть такую цепочку нормальной.

К нормальным цепочкам сводится построение ребер всех правильных многогранников, а также сторон правильных n -угольников при $n = 3, 3 \cdot 2^k, 4, 4 \cdot 2^k, 5, 5 \cdot 2^k, 15$, рассмотренных в «Началах». Таким образом, между алгеброй квадратных уравнений и геометрией циркуля и линейки существует глубокая связь.

Можно ли любую задачу, сформулированную в терминах геометрии Евклида, решить с помощью циркуля и линейки, или, что то же, можно ли свести ее к нормальной цепочке квадратных уравнений? Скоро появились первые задачи, для которых это сделать не удавалось.

Первые неразрешимые задачи

В V в. до н. э. были поставлены три задачи, сразу же получившие большую известность. Это удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга. Все они имеют очень длинную историю: первые две были решены только в 30-х годах прошлого века, а третья — в конце его. Все три оказались неразрешимыми средствами классической геометрической алгебры, и их исследование потребовало создания новых методов. Первая из них формулируется так: построить куб, объем которого был бы вдвое больше объема заданного куба.

Если обозначить ребро заданного куба через a , а искомого — через x , то задача эквивалентна уравнению

$$x^3 = 2 a^3.$$

Задача эта была настолько популярной, что о ней сложили легенду. Рассказывалось, что на острове Делос вспыхнула чума. Оракул, спрошенный о том, как избавиться от этого бедствия, ответил, что надо увеличить вдвое жертвенник, имевший форму куба. Поэтому задача об удвоении куба носит еще название делосской.

Естественно, что удвоение куба пытались осуществить с помощью построений циркулем и линейкой. В переводе на язык алгебры это означало, что $\sqrt[3]{2}$ пытались представить в виде конечной комбинации квадратных радикалов. Это не удавалось. Тогда началось тщательное исследование задачи. Гиппократ Хиосский обобщил ее и свел к вопросу об отыскании двух средних пропорциональных между заданными величинами. Пусть задан прямоугольный параллелепипед a^2b (всегда можно предполагать, что основание уже преобразовано в квадрат), требуется преобразовать его в куб

$$x^3 = a^2b.$$

Решение задачи, как показал Гиппократ, эквивалентно нахождению таких двух величин x и y , что

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

При $b = 2a$, x и равняется ребру удвоенного куба.

Вскоре Архит Тарентский показал, что величину x можно найти, рассмотрев пересечение трех поверхностей — конуса, цилиндра и поверхности, полученной вращением окружности вокруг касательной к ней (так как поверхность, полученную вращением окружности вокруг прямой, ле-

жащей в ее плоскости и не пересекающей ее, называют тором; тор имеет форму баранки, отверстие которой называют внутренним кругом тора, — данную поверхность можно назвать тором, внутренний круг которого имеет нулевой радиус). В существовании поверхностей, полученных вращением окружностей и скольжением прямых по окружности, древние не сомневались. Пересечение таких поверхностей и давало решение. Таким образом, решение Архита доказывало существование двух средних между любыми двумя величинами, однако оно не давало удобного способа их нахождения. Дальнейшие попытки ученых были направлены к нахождению других способов построения двух средних между двумя заданными величинами. Для этого обратились к тем геометрическим местам — кривым, которые получаются из пропорции Гипсократа:

$$ay = x^2 \text{ и } xy = ab \text{ или } y^2 = bx.$$

Построение координат x , y точки пересечения таких двух «мест» и давало решение задачи (в случае выбора «мест» $ay = x^2$ имеется в виду точка, отличная от начала координат). Однако исследование «мест» было делом отнюдь не легким. Прежде всего надо было установить, являются ли эти «места» непрерывными кривыми (тогда можно говорить о точке их пересечения). Только Мeneхму во второй половине IV в. до н. э. удалось представить эти «места» как плоские сечения конусов вращения. Мeneхм рассмотрел три рода конусов вращения: прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Проводя сечения плоскостью, перпендикулярной к образующей, он получил три рода кривых, которые мы теперь называем соответственно параболой, гиперболой и эллипсом. Эти названия кривым дал Аполлоний, о чем мы скажем ниже; до этого их называли сечениями прямоугольного, тупоугольного и остроугольного конуса. После такого стереометрического определения Мeneхм переходил к выводу планиметрических свойств полученных сечений и в дальнейшем оперировал только с этими планиметрическими свойствами, равносильными нашим уравнениям (например, $ay = x^2$ для параболы). Для чего же нужно было это стереометрическое определение? По-видимому, как и в решении Архита, оно служило для доказательства существования и непрерывности рассматриваемых геометрических мест.

Именно исследование задачи удвоения куба, которая сама по себе является весьма частной, привело, вероятно, к введению в математику новых чрезвычайно важных кривых — конических сечений. Возможно, что внимание к этим линиям привлекло и то обстоятельство, что конец тени шеста солнечных часов описывает на Земле в течение дня дугу конического сечения. Кривые были многосторонне изучены уже в древности и являлись основными геометрическими объектами наряду с прямыми и окружностями. Архимед изучал тела, полученные вращением конических сечений, и определял их объемы. Он же систематически применял конические сечения для решения задач, эквивалентных кубическим уравнениям. Однако широкое применение этих кривых к астрономии и механике относится только к XVI—XVII вв.

Ко времени деятельности Евклида и его школы (конец IV в. до н. э.) сложилось убеждение, что задача удвоения куба не разрешима циркулем и линейкой. Примерно в это же время (или несколько позже) была проведена первая классификация задач: к первому классу отнесены плоские задачи, т. е. те, которые могут быть решены с помощью циркуля и линей-

ки; ко второму — телесные, решение которых можно осуществить с помощью конических сечений; наконец, к третьему — линейные, т. е. все остальные. Папп (III в. н. э.) считал немалой ошибкой, когда плоскую задачу решали с помощью конических сечений. Эта классификация свидетельствует об уверенности древних в неразрешимости (в общем случае) задач, эквивалентных кубическим уравнениям, с помощью циркуля и линейки.

Первая попытка доказать неразрешимость кубического уравнения в частном случае

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

с помощью квадратных иррациональностей X книги «Начал» Евклида принадлежит Леонардо Пизанскому (см. стр. 267). Прошло еще около четырех веков, пока Декарт не сформулировал в общем виде, что корни кубического уравнения с рациональными коэффициентами могут быть построены циркулем и линейной тогда и только тогда, когда это уравнение приводимо, т. е. имеет по крайней мере один рациональный корень. Он молчаливо предполагал, что все корни действительны. Декарт нашел аналогичный критерий и для уравнения четвертой степени, однако не обосновал этих утверждений. Первые строгие доказательства их были даны в 1837 г. П. Ванцелем.

Задача трисекции угла, в которой требуется разделить данный угол на три равные части, не была сведена древними к кубическому уравнению (с помощью тригонометрии задачу можно свести к решению уравнения $3x - 4x^3 = a$, где $a = \sin \alpha$, $x = \sin \frac{\alpha}{3}$, что удалось математикам ислама). В истории античной математики эта задача замечательна тем, что для ее решения были применены «вставки» и введена первая трансцендентная кривая — квадратриса.

Метод вставки заключался в том, чтобы поместить отрезок определенной длины между двумя данными линиями так, чтобы концы его находились на этих линиях, а сам он или его продолжение проходили через данную точку. Обычно рассматривались вставки между прямыми и окружностями. Однако если задача решена посредством вставки, то природа ее остается неясна. Действительно, если двигать отрезок заданной длины a так, чтобы конец его находился на заданной кривой, а продолжение проходило через данную точку A , то второй конец отрезка опишет некоторую кривую L . Осуществление вставки эквивалентно нахождению пересечения L со второй из заданных линий. Но какова природа кривой L ? Она может быть и очень сложной. В случае, если первая кривая есть прямая, то в качестве L получим конхоиду. Одни вставки могут быть произведены с помощью конических сечений, другие относятся к линейным задачам. Поэтому Апполоний в не дошедшем до нас сочинении предпринял классификацию вставок, поэтому же древние старались по возможности их избегать.

В V в. до н. э. для трисекции угла Гипсий из Элиды ввел новую кривую, позднее названную Лейбницем квадратрисой, которая определялась механически. Пусть отрезки OA и AB (рис. 19) начинают двигаться одновременно, причем OA равномерно вращается по часовой стрелке вокруг точки O , а AB равномерно опускается вниз, оставаясь параллельным самому себе, так что оба они достигают положения OC одновременно. Геометрическое место точек M пересечения обоих отрезков и образует квад-

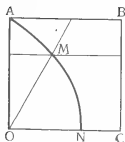


Рис. 19

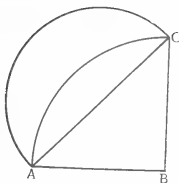


Рис. 20

патрису. Из определения следует, что ординаты кривой пропорциональны соответствующим углам

$$y : y_1 = \varphi : \varphi_1.$$

Кривая, как нетрудно видеть, может быть применена для деления угла на любое число равных частей.

Название «квадратриса» объясняется тем, что с помощью этой же кривой можно решить и задачу о квадратуре круга, т. е. о построении квадрата, равновеликого данному кругу. Если удвоение куба и трисекция угла сводятся к кубическим уравнениям, то эта задача, равносильная построению отрезка, равного π , как было строго доказано только Ф. Линдеманом и Ш. Эрмитом в XIX в., не может быть сведена к алгебраическому уравнению (π не может быть корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, т. е., по современной терминологии, является трансцендентным числом). Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.) пытался подойти к квадратуре круга, разыскивая квадратуемые луночки, т. е. фигуры, ограниченные дугами двух окружностей, для которых можно построить равновеликие квадраты. Гиппократ нашел три вида таких луночек, в частности луночку, ограниченную четвертью окружности ABC и полуокружностью, построенной на хорде AC этой четверти окружности как на диаметре (рис. 20): если $AB = R$, то $AC = R\sqrt{2}$ и площадь четверти большого круга и половины малого круга равна $\pi R^2/4$, поэтому площадь луночки равна площади треугольника ABC . Такие квадратуемые луночки получили название гиппократовых луночек. Однако их открытие не приблизило Гиппократа к квадратуре круга; как выяснили в 30—40-х годах нашего века Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов, имеется пять видов квадратуемых луночек и ни одна из них не квадратуема вместе с кругом. Решение квадратуры круга с помощью квадратрисы, основанное на том, что в случае, когда на рис. 19 стороны квадрата $OACB$ равны R , отрезок ON равен $2R/\pi$, было предложено в IV в. до н. э. Диностратом.

К алгебраическим уравнениям сводится еще одна классическая геометрическая задача — о построении правильных многоугольников. Еще пифагорейцы умели с помощью циркуля и линейки вписать в круг равно-сторонний треугольник, квадрат и правильный пятиугольник, а также все те n -угольники, которые получаются из них удвоением числа сторон. В «Началах» Евклида строится еще правильный 15-угольник. Проблема со-

стояла в выяснении того, при каких n соответствующий n -угольник можно построить с помощью циркуля и линейки. В частности, древних интересовал случай $n=7$. До нас дошло в арабском переводе построение Архимеда. Вставка, которую он для этого применил, может быть осуществлена с помощью конических сечений. Алгебраически эта задача, как показали математики стран ислама, эквивалентна решению кубического уравнения.

Однако выяснить вопрос, какие же правильные многоугольники можно построить, удалось только в конце XVIII в. молодому Гауссу (см. т. III, гл. 3).

Кубические уравнения

Более систематическое исследование задач, эквивалентных кубическим уравнениям, относится только к эпохе эллинизма. Архимед в сочинении «О шаре и цилиндре» (книга II, предложение 4) свел задачу о рассечении шара плоскостью на два сегмента, объемы которых имели бы заданное отношение $m:n$ ($m > n$), к нахождению высоты x большего сегмента из пропорции

$$4a^2 : x^2 = (3a - x) : \frac{m}{m+n} a, \quad (1)$$

где a — радиус шара.

Архимед обобщает задачу: рассечь заданный отрезок a на две части x и $a-x$ так, чтобы

$$(a - x) : c = S : x^2, \quad (2)$$

где c и S — заданные отрезок и площадь.

Заметив, что при такой общей постановке задача не всегда разрешима (имеются в виду только положительные действительные решения), Архимед приступает к ее исследованию с тем, чтобы наложить ограничения на c и S . Он говорит, что изложит полное решение задачи «в конце», однако соответствующее место не сохранилось. Жившие на столетие позже Архимеда греческие геометры Диокл и Дионисодор уже не знали его. Они предложили собственные, гораздо более сложные решения, но никто из них не сумел провести анализ общего случая.

Только в VI в. н. э. комментатор Архимеда Евтокий нашел утраченное место. Архимед решает задачу с помощью двух конических сечений: параболы

$$y = \frac{x^2}{p} \quad (3)$$

и гиперболы

$$y = \frac{cb}{a-x} \quad (4)$$

(здесь положено $S = pb$). Оба уравнения легко получить из пропорции (2). Для выяснения необходимых условий Архимед переходит от пропорции (2) к кубическому уравнению

$$x^2(a - x) = Sc, \quad (5)$$

которое он выражает словесно как соотношение между объемами. Ясно, что уравнение (5) может иметь положительные корни, если

$$Sc \leq \max_{0 \leq x \leq a} x^2(a-x).$$

Итак, проблема сводится к нахождению экстремума $x^2(a-x)$.

Оставим пока в стороне вопрос о методе экстремумов Архимеда, мы вернемся к этому, когда будем говорить об инфинитезимальных методах древних. Скажем только, что Архимед полностью исследовал условия существования положительных вещественных корней уравнения (5), а именно:

1) если $Sc < 4a^3/27$, то на участке $(0, a)$ имеются два таких корня;
2) если $Sc = 4a^3/27$, то имеется один корень (как сказали бы мы, — двукратный);

3) если $Sc > 4a^3/27$, то корня нет.

Здесь $4a^3/27$ есть максимум $x^2(a-x)$, достигаемый при $x = 2a/3$.

В конце письма, предпосланного книге «О коноидах и сфероидах» (греки называли сфероидами эллипсоиды вращения, прямоугольными коноидами — параболоиды вращения, а тупоугольными коноидами — полостями двуполостных гиперболоидов вращения), Архимед пишет, что с помощью доказанных в книге теорем можно решить ряд задач, как, например: от данного сфероида или коноида отсечь сегмент плоскостью, проведенной параллельно заданной, так, чтобы отсеченный сегмент был равен данному конусу, цилиндру или шару. Перечисленные задачи, так же как и задачи о делении шара, сводятся к кубическим уравнениям, причем в случае тупоугольного коноида уравнение будет иметь вид

$$x^2(a+x) = Sc.$$

Из текста Архимеда можно заключить, что он проанализировал и решил это уравнение. Таким образом, Архимед рассмотрел кубические уравнения вида $x^3 + ax + b = 0$ при различных значениях a и b и дал метод их решения. Однако исследование кубических уравнений оставалось для греков трудной задачей, с которой, в ее общем виде никто, кроме Архимеда, не мог справиться. Решение отдельных задач, эквивалентных кубическим уравнениям, греческие математики получали с помощью нового геометрического аппарата конических сечений. Этот метод впоследствии восприняли математики стран ислама, которые сделали попытку провести полный анализ всех уравнений третьей степени.

Но еще до этого, и притом греческими математиками, был сделан новый решительный шаг в развитии алгебры: геометрическая оболочка была сброшена, и началось построение буквенной алгебры на основе арифметики. Это произошло в первые века нашей эры, о чем мы будем говорить позже.

Парадоксы бесконечного

Вместе с открытием несоизмеримых величин в математику вошло понятие бесконечности. Разумеется, и до этого математические теоремы относились к бесконечным множествам объектов: ко всем равнобедренным треугольникам, ко всем вертикальным углам и т. д. Но теперь дело шло уже об изучении свойств самих бесконечных множеств и об исследовании бесконечных последовательностей. К этим вопросам приводили две основ-

ные проблемы, стоявшие перед античной математикой, — проблема действительного числа и проблема меры.

До открытия несоизмеримости в основу определения отношения двух отрезков был положен алгоритм Евклида. С его помощью находили общую меру f этих отрезков, и если $a = mf$, $b = nf$, то $a : b = m : n$. Однако если отрезки a и b несоизмеримы, то алгоритм переставал быть конечным, и было неясно, можно ли с его помощью определить равенство или неравенство двух отношений.

Неясным становился и вопрос о строении отрезка и других непрерывных величин. Существовало учение, согласно которому непрерывные величины состоят из бесконечного множества неделимых частиц. Благодаря этому начали оперировать с актуально бесконечными множествами. Первоначально полагали, что они подчиняются тем же законам, что и конечные величины (например, что целое больше части), свободно применяли к ним закон исключенного третьего и т. п. Это вскоре привело к обнаружению первых парадоксов.

С бесконечными процессами ученые встретились и при определении площадей криволинейных фигур или объемов различных геометрических тел. Наиболее популярной из этих задач в то время была задача квадратуры круга. Вот какое решение этой проблемы, основанное на некритическом оперировании с актуальной бесконечностью, было предложено Антифоном в V в. до н. э. Впишем в круг многоугольник (например, треугольник или квадрат); для него, как и для каждой прямолинейной фигуры, можно построить с помощью циркуля и линейки равновеликий квадрат. Будем теперь вписывать в круг многоугольники, удваивая число их сторон. Для каждого такого многоугольника тоже можно построить равновеликий ему квадрат. Но круг есть многоугольник с бесконечным числом сторон, значит, и для него можно построить равновеликий квадрат. Таким образом, предложение, верное для любого многоугольника с конечным числом сторон, Антифон перенес на многоугольник с бесконечным числом сторон.

Уже в древности математики считали рассуждение Антифона некорректным. Аристотель в «Физике» приводит квадратуру Антифона в качестве примера такого заключения, которое исходит из ложных посылок, поэтому опровергать эту квадратуру — не дело геометров. Действительно, при квадратуре Антифона приходится либо предполагать, что круг является многоугольником с очень большим числом сторон, каждая из которых очень мала, либо считать, что число сторон у такого многоугольника бесконечно. Но тогда нигде не следует, что свойство, справедливое для многоугольника с любым конечным числом сторон, останется справедливым и для многоугольника с бесконечным числом сторон. В обоих случаях рассуждение Антифона было неприемлемым.

Трудности, связанные с понятиями бесконечного и непрерывного, привели к глубокому кризису основ античной математики — первой большой буре, потрясшей еще неокрепшее здание науки. Ситуация, сложившаяся в V в. до н. э. в Греции, напоминает ту, которая имела место в современной математике в конце XIX — начале XX в. И здесь и там кризис основ был вызван проблемой действительного числа (новое название проблемы несоизмеримости) и меры и некритическим оперированием с бесконечными множествами. Как и в наше время, в Греции вопросы эти быстро вышли за пределы узкого круга математиков. Они занимали умы философов всех школ и направлений от элеатов до Анаксгора и от Демокрита

до Аристотеля. Древнегреческие софисты, которых Платон называл мелкими торговцами истиной, сделали эти вопросы популярными. Они же, ловко жонглируя еще туманными понятиями бесконечного и непрерывного, пытались найти легкие решения по настоящему трудных и глубоких математических проблем.

Вскрыть действительные трудности, тающиеся в понятиях непрерывного и бесконечного, и тем самым показать, сколь еще не совершенны были представления о них, удалось Зенону Элейскому, жившему в V в. до н. э. Он придал своим рассуждениям острую и красочную форму парадоксов, которые уже более 25 веков не перестают привлекать внимание математиков и философов. Каждая эпоха предлагала свое решение этих парадоксов, или апорий (*ἀπορία* — трудность), интерес к ним не ослабел и в наши дни, о чем можно судить хотя бы по числу статей, которые посвящаются этому вопросу. Только один английский журнал «Analysis» с 1951 по 1953 г. опубликовал не менее семи статей об апориях Зенона.

Зенон был любимым учеником Парменида — главы школы элеатов, который первый начал строить философию на основе логических рассуждений. «Прежние же (до него мыслители. — И. Б.), — писал Симпликий опираясь на текст Евдема Родосского, — высказывали свое мнение без логических доказательств»¹. Древние считали Парменида родоначальником логики. Платон, который называл его мыслителем «действительно необыкновенной глубины», оставил впечатляющий портрет Парменида в диалоге, названном его именем.

Парменид признавал «два естества»: «истинно сущее», которое постигается только разумом, и «мнимо существующее» или «существующее лишь во мнении», о котором мы составляем суждения на основании ощущений. Последние суждения носят вероятностный характер, в них не заключается «подлинной достоверности». «Истинно сущее» познается только с помощью логических рассуждений. Несколько модернизируя, можно сказать, что для элеатов существовать означало быть непротиворечивым. Именно Парменид впервые высказал логические законы тождества и исключенного третьего и применял их в своих доказательствах.

«Истинно сущее» элеатов — это то, что можно получить строгой дедукцией, и оно сильно отличается от видимого мира. В то время как «во мнении» существует множественность и движение, «истинно сущее» вечно, неподвижно, едино и неделимо. (Например, вечными и не зависящими от времени являются теоремы евклидовой геометрии, строго выведенные на основе постулатов.)

Хотя элеаты и пришли как будто к нелепости — отрицанию множественности вещей и движения, так что даже Аристотель, согласно Филону, порицал «приверженцев Парменида за их мнение, будто не следует обращать никакого внимания на фактическую действительность, но только на последовательность рассуждений»², но для развития дедуктивных наук необходимо было оторваться от непосредственно наглядного и попытаться мыслью постигнуть сущность вещей. Действительно, лишь путем отказа от непосредственных показаний органов чувств можно было прийти к гелиоцентрической системе в астрономии, а впоследствии и к неевклидовой геометрии.

¹ А. О. Маковельский. Досократики, вып. II. Казань, 1915, стр. 27.

² Там же, стр. 26. Следует обратить внимание, что Аристотель говорит здесь не о самом Пармениде, а о его последователях.

Элеаты систематически пользовались доказательствами путем приведения к абсурду: для обоснования предложения A они доказывали, что отрицание его $\bar{A}$ ложно. Так поступал и Зенон, прозванный за мастерское владение диалектикой «двуязыким». Чтобы логически обосновать утверждения элеатов, он предположил существование множественности и движения и показал, какие противоречия таятся в этих концепциях. В древности было известно более 40 его апорий. Из дошедших до нас апорий (их насчитывают девять) наиболее знамениты четыре апории движения и несколько отрывков из апорий множественности. Тексты этих последних менее ясны, чем четыре первых, которые формулирует и подробно обсуждает в своей «Физике» Аристотель. Отрывки аргументов Зенона против множественности приводит комментатор Аристотеля Симпликий, отделенный от Зенона более чем десятью веками. Поэтому здесь весьма возможны искажения и неточности, хотя сам Симпликий и ссылается на недошедшие до нас сочинения Евдема Родосского — древнейшего известного нам историка математики (ср. стр. 65).

Одним из наиболее замечательных возражений против множественности является следующее: «Если сущее множественно, то оно одновременно должно быть большим и малым, и притом большим до безграничности и малым до исчезновения»¹.

Это рассуждение Зенона можно назвать «апорией меры» и перефразировать так. Пусть отрезок есть бесконечное множество «неделимых» частей; если величина отдельных «неделимых» равна нулю (т. е. «неделимые» — это точки), то и величина всего отрезка есть нуль; 2) если же каждое «неделимое» имеет некоторую величину (неявно предполагается, что эта величина для всех «неделимых» одинакова), то величина отрезка будет бесконечной.

Апория показывала, что нельзя определять меру отрезка, как сумму мер «неделимых», что понятие меры множества вовсе не является чем-то очевидно заключенным в самом понятии множества и что мера множества, вообще говоря, не равна сумме мер его элементов. Теперь мы определяем меру множества при помощи покрытий его системами интервалов, причем принимается, что интервалы уже имеют определенную длину (меру).

Рассмотрим апорию движения.

«Дихотомия» (рассечение пополам). Движущееся тело никогда не достигнет конца пути, потому что оно должно сначала дойти до середины пути, затем до середины остатка и т. д. Пусть AB — отрезок длины 1 и точка M движется из A в B . Прежде чем дойти до B , она должна «отсчитывать» бесконечное множество «середин» $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$; значит, точка B никогда не будет достигнута.

Эта апория вовсе не разрешается тем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Г. Вейль, чтобы пояснить, в чем именно здесь состоит трудность, привел такой пример: представим себе вычислительную машину, которая выполняла бы первую операцию в $\frac{1}{2}$ минуты, вторую — в $\frac{1}{4}$ минуты, третью — в $\frac{1}{8}$ минуты и т. д. Такая машина могла бы к концу первой минуты «пересчитать» весь антуральный ряд чисел и решить, например, великую теорему Ферма или любую другую проблему теории чисел, связанную с вопросом существования. Ясно, что работа над конструкцией такой машины является без-

¹ А. О. Маковельский. Досократики, вып. II, стр. 85.

надежным делом. Так почему же тогда точка M достигает конца B , «отсчитав» счетное множество точек $A_1, A_2, \dots$?

Не касаясь пока более общего смысла этой апории, остановимся на ее математическом содержании. Один из математических вопросов, связанных с ней, состоит в следующем: допустимо ли пользоваться актуальной бесконечностью, допустимо ли, например, рассматривать весь натуральный ряд уже построенным и ввести некоторое новое, трансфинитное число, следующее за всеми натуральными? Теория множеств Г. Кантора (70-е годы XIX в.) отвечает на этот вопрос положительно. Кантор определяет порядковые трансфинитные числа. Если воспользоваться ими, можно сказать, что точка M достигает A_1 в момент t_1 , A_2 — в момент $t_2, \dots$, A_n — в момент t_n , а точка B — в момент t_ω , где ω — первое число, следующее за всем натуральным рядом. Заметим, что Р. Бэр с помощью точно такой же конструкции ввел первый трансфинит ω , который и является порядковым типом множества натуральных чисел. Однако с введением теории множеств затруднения, связанные с актуальной бесконечностью, вовсе не были преодолены. Они приняли только другую форму и вновь выступили в виде парадоксов теории множеств. В одном из них, так называемом парадоксе Бурали-Форти, рассматривается порядковый тип множества всех порядковых типов. Приписывание ему порядкового номера приводит к противоречию. В настоящее время существует точка зрения, согласно которой свободное оперирование с актуально бесконечными множествами, даже счетными, неправомерно. Ниже мы подробнее будем говорить о том, как отвечали на тот же вопрос античные математики. Сейчас скажем только, что они отнюдь не встали на канторовскую точку зрения.

«Ахиллес и черепаха». Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепахи, если в начале движения черепаха находилась на некотором расстоянии впереди него. Действительно, пусть начальное расстояние есть a и пусть Ахиллес бежит в k раз быстрее черепахи. Когда Ахиллес пройдет расстояние a , черепаха отползет на a/k , когда Ахиллес пройдет это расстояние, черепаха отползет на a/k^2 , и т. д., т. е. всякий раз между состоящимися будет оставаться отличное от нуля расстояние.

В этой апории, помимо того же затруднения отсчитанной бесконечности, имеется и еще одно. Предположим, что в некоторый момент времени t_ω Ахиллес догонит черепаху. Запишем путь Ахиллеса

$$S_A = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots$$

и путь черепахи

$$S_C = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots$$

Каждому отрезку пути a/k^n , пройденному Ахиллесом, соответствует отрезок пути a/k^{n+1} черепахи. Поэтому к моменту встречи Ахиллес должен пройти «столько же» отрезков пути, сколько и черепаха. С другой стороны, каждому отрезку a/k^n , пройденному черепахой, можно сопоставить равный ему по величине отрезок пути Ахиллеса. Но, кроме того, Ахиллес должен пробежать еще один отрезок длины a , т. е. он должен пройти на единицу больше отрезков, чем черепаха. Если количество отрезков, пройденное последней, есть α , то получаем

$$1 + \alpha = \alpha.$$

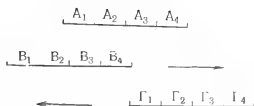


Рис. 24

Это последнее затруднение: «часть равна целому» — явилось впоследствии предметом размышления Галилея, Николая Кузанского и многих других, которые давали этому парадоксу различные интерпретации. Чешский ученый Б. Больцано в первой половине XIX в. установил, что любое бесконечное множество может быть приведено во взаимно однозначное соответствие со своей правильной частью. Теперь это свойство иногда принимается в качестве определения бесконечного множества.

«Стрела». Если время и пространство состоят из неделимых частиц, то летящая стрела неподвижна, так как в каждый неделимый момент времени она занимает равное себе положение, т. е. покоится, а отрезок времени и есть сумма таких неделимых моментов.

Эта апория направлена против представления о непрерывной величине как о сумме бесконечного числа неделимых частиц.

«Стадион». Пусть по стадиону движутся по параллельным прямым равные массы с равной скоростью, но в противоположных направлениях. Пусть ряд A_1, A_2, A_3, A_4 означает неподвижные массы, ряд B_1, B_2, B_3, B_4 — массы, движущиеся вправо, а ряд $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ — массы, движущиеся влево (рис. 24). Будем теперь рассматривать массы A_4, B_i, Γ_i как неделимые. В неделимый момент времени B_i и Γ_i проходят неделимую часть пространства. Действительно, если бы в неделимый момент времени некоторое тело проходило более одной неделимой части пространства, то неделимый момент времени был бы делим, если же меньше, то можно было бы разделить неделимую часть пространства. Рассмотрим теперь движение неделимых B_i и Γ_i друг относительно друга: за два неделимых момента времени B_4 пройдет две неделимые части A_i и одновременно отсчитает четыре неделимые части Γ_i , т. е. неделимый момент времени окажется делимым.

Этой атории можно придать и несколько другую форму. За одно и то же время t точка B_4 проходит половину отрезка A_1A_4 и целый отрезок $\Gamma_1\Gamma_4$. Но каждому неделимому моменту времени отвечает неделимая часть пространства, проходящая за это время. Тогда в некотором отрезке a и отрезке $2a$ содержится «одинаковое» число точек, «одинаковое» в том смысле, что между точками обоих отрезков можно установить взаимно однозначное соответствие. Этим впервые было установлено такое соответствие между точками отрезков различной длины. Если считать, что мера отрезка получается как сумма мер неделимых, то вывод является парадоксальным.

Мы коснулись здесь только некоторых математических вопросов, связанных с парадоксами Зенона. Но сам Зенон придал своим апориям ярко выраженный физический смысл: он направил их против возможности движения. Разбирая «дихотомию», мы уже говорили о возможности или, вер-

ние, о невозможности построения такого автомата, который мог бы в течение одной минуты совершить счетное множество операций. Но ведь движение тел происходит ежедневно на наших глазах, значит, такие автоматы как будто легко осуществимы. В чем же здесь дело? Вопрос уже стоит о соотношении математической модели и реального физического пространства.

В апориях Зенона предполагается, что пространство в малом устроено так же, как и в большом, факты из области движения величин определенного порядка переносятся на все величины. Между тем согласно современным физическим взглядам физические величины вовсе не являются делимыми до бесконечности. Современная физика открывает все новые и новые замечательные факты о строении микромира. Д. Гильберт и П. Бернайс в своей книге «Основания математики» (1934) писали, что решение парадокса «дихотомия» состоит «в указании на то обстоятельство, что мы вовсе не обязательно должны верить в то, что математическое пространственно-временное представление движения имеет физическое значение для произвольно малых интервалов пространства и времени; скорее, мы имеем все основания предполагать, что эта математическая модель экстраполирует факты из некоторой области опыта, а именно из области движений в пределах того порядка величин, который пока доступен нашему наблюдению, экстраполирует просто в смысле образования идей, подобно тому как механика сплошной среды совершает экстраполяцию, предполагающую непрерывное заполнение пространства материей... Ситуация оказывается сходной во всех случаях, когда имеется вера в возможность непосредственного узрения (актуальной) бесконечности как данной посредством опыта или восприятия... Более подробное исследование показывает затем, что бесконечность вовсе не была нам дана, а была только интерполирована или экстраполирована посредством некоторого интеллектуального процесса»¹.

В. И. Ленин дал глубокий анализ апорий Зенона в своем «Конспекте лекций Гегеля по истории философии». Касаясь вопроса об отображении движения в логике понятий, он писал: «Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия»².

Мы видим, что апории Зенона затронули действительно глубокие и сложные вопросы. Как же ответила на них античная наука? В частности, как она разрешила вопрос о том, допустимо ли пользоваться в математике актуально бесконечно большими и актуально бесконечно малыми величинами? Мы можем судить о тех точках зрения, которые имели место в античной математике, и о тех дискуссиях, которые там велись, по косвенным данным, главным образом по сообщениям Аристотеля и других философов этого времени.

Демокрит

До нас дошли только отголоски тех великих споров, которые в то время впервые потрясли науку. Накал страстей был не менее интенсивным, чем в аналогичной ситуации в начале нашего века, а о разнообразии идей, которые выдвигались для преодоления кризиса, мы можем составить, увы,

¹ С. Клини. Введение в метаматематику. Перевод А. С. Есенина-Вольпина. Под ред. В. А. Успенского. М., 1957, стр. 55.

² В. И. Ленин. Философские тетради, 1947, стр. 243.

далеко не полное представление. Так, известно, что логические трудности, возникшие в математике, привели Протагора (V в. до н. э.) к отрицанию всех вообще математических абстракций. По его мнению, нельзя говорить о линиях без ширины и точках, не имеющих никаких размеров, потому что никто никогда их не видел. Круг и прямая касаются не в точке, а всегда по некоторому конечному отрезку и т. д. Но отказ от сложившихся математических абстракций означал отказ от науки, что хорошо понимали греческие ученые. Выражая их общее убеждение, Аристотель писал, что наука есть знание не индивидуального, а общего. Поэтому путь Протагора оказался неприемлемым.

Один из способов построения математики был предложен великим философом-атомистом древности Демокритом (V—IV вв. до н. э.). Мы, однако, очень мало знаем о его методах и можем судить о них только на основании косвенных данных. По свидетельству Архимеда, Демокрит установил, что пирамида равновелика $\frac{1}{3}$ призмы, имеющей с ней одинаковые основание и высоту, а конус — $\frac{1}{3}$ соответствующего цилиндра, но доказательств не дал.

Основываясь на некоторых фрагментах из сочинений Демокрита, можно думать, что он перенес в математику свою натурфилософскую концепцию и начал составлять тела из конечного числа элементарных частей — атомов, объемы которых известны. Объем всего тела получался суммированием объемов этих элементарных частей. Но, как теперь доказано, пирамиду нельзя составить из конечного числа призм, тем более это относится к конусу и цилиндру, поэтому для строгого обоснования результатов, о которых пишет Архимед, необходим предельный переход, которым Демокрит, разумеется, не пользовался. Поэтому-то Архимед и считал его результаты недоказанными.

Путь Демокрита — путь построения «конечной математики» — был совершенно непригоден для исследования непрерывных величин, не говоря уже об отображении и изучении движения. И все же в концепции Демокрита содержалась чрезвычайно плодотворная мысль, которая была впервые по-настоящему оценена и развита только Архимедом. Мы имеем в виду принцип, вообще говоря, приближенного, но сколь угодно точно составления любых тел из большого числа элементарных частей, размеры которых известны. В этом можно видеть зародышевую форму интегральных методов.

Евдокс

Впервые ту точку зрения, которая стала общепринятой в греческой математике, высказал философ Анаксагор (V в. до н. э.). Его основной тезис гласил: «В малом не существует наименьшего, но всегда есть еще меньшее». Иначе говоря, не отрицая бесконечной делимости величин, Анаксагор считал, что неправомерно мыслить бесконечный процесс законченным. В результате деления отрезка всегда будут получаться отрезки, которые будут вновь делимы, и таким путем мы никогда не дойдем до неделимых частиц. Эта концепция и получила развитие в греческой математике.

Новые основы математики — общее учение об отношениях и строгие методы предельных переходов — были созданы Евдоксом Книдским. При этом актуальная бесконечность была отвергнута. Вот что писал современ-

ник Евдокса Аристотель, выражая, по-видимому, идеи, сложившиеся в школе Евдокса: «Наше рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного... не отнимает у математиков их теории; ведь они не пуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: математикам надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, какой им желательно, и в такой же пропорции, в какой делится величайшая величина, можно разделить в какую угодно другую»¹.

Евдокс был не только гениальным математиком, острота ума которого и до сих пор вызывает глубокое восхищение, но и выдающимся астрономом, географом, врачом, философом и оратором. Евдокс родился в Книде, на юго-западе Малой Азии, около 406 г. до н. э. В молодости он побывал в Сицилии, где учился медицине, и в Великой Греции, где изучал математику под руководством крупнейшего ученого того времени — Архита. И если Феодор и Теэтет были представителями алгебраического направления в классической греческой математике, то Архит и Евдокс, а затем ученики последнего представляли то направление, которое мы сейчас называем «математическим анализом».

Евдоксу было около 23 лет, когда он приехал в Афины — культурный центр Греции того времени. Его, как и многих других молодых людей, привлекала знаменитая Академия Платона, на дверях которой была высечена надпись: «Пусть сюда не входит не обученный геометрии». Там широко обсуждались основные проблемы науки и философии. Сейчас трудно восстановить, какие отношения установились между Евдоксом и Платоном. Известно, что Евдокс занялся задачей, поставленной Платоном, и успешно решил ее. До этого астрономия носила описательный характер. Платон предложил астрономам сконструировать модель, в которой видимые движения Солнца, Луны и планет получались бы путем комбинации равномерных круговых движений. Модель Евдокса состояла из 27 концентрических сфер, в центре которых находилась Земля. Каждая из сфер (кроме внешней, предназначенной для неподвижных звезд) совершала равномерное круговое движение, причем сферы делились на группы (три сферы — для описания движения Солнца, три — для Луны, по четыре — для каждой из пяти планет), движения которых были связаны между собой. Схизпарелли в конце прошлого века на основании описаний Аристотеля и Симпликия сумел восстановить эту чрезвычайно остроумную модель.

Конструкция Евдокса, свидетельствовавшая о прекрасном пространственном воображении ее автора и знании им начал сферической геометрии, ознаменовала начало новой эры в истории астрономии и ее геометрического аппарата, развитых затем Аристархом Самосским, Гиппархом, Менелаем, Птолемеем и другими.

Однако не следует думать, что Евдокс сделался учеником и последователем Платона. До нас дошли сведения о расхождении между ними и даже о том, что Платон завидовал Евдоксу. Последнее обычно справедливо считают маловероятным. В действительности же Платон паничного превосходил Евдокса в вопросах философии, но еще больше уступал ему в математике. Быть может, расхождения были связаны со взглядами на проблему существования в математике и на роль математического доказательства.

¹ Аристотель. Физика. Перевод В. П. Карпова. М.—Л., 1936, стр. 6.

Вскоре Евдокс основал собственную научную школу в Кизике на Мраморном море, там же была построена обсерватория, в которой впервые в Элладе систематически велись наблюдения. В Кизике был составлен первый в Греции звездный каталог. Евдокс пытался определить сравнительную величину небесных тел. Он знал уже, что Солнце больше Земли, но считал, что отношение их диаметров равно 9:1. Ему же приписывают первое определение длины земного меридиана.

Однако наиболее глубокие исследования Евдокса относятся к области, которую мы теперь называем введением в анализ бесконечно малых: он построил общую теорию отношений и создал «метод исчерпывания», позволивший вполне строго совершать предельные переходы.

Умер Евдокс около 355 г. до н. э., окруженный славой и почетом.

Теория Евдокса дошла до нас в изложении Евклида («Начала», V книга). В основе ее лежала новая, более общая концепция величины.

Известно, что и до этого были попытки обосновать общую теорию отношений. Одна из них, основанная на применении алгоритма Евклида, т. е., по существу, на сравнении непрерывных дробей, которыми выражаются отношения $a:b$ и $c:d$, принадлежала, по-видимому, Теэтету. Однако, как отмечает Аристотель, в «старой» теории отношений основные предложения приходилось доказывать отдельно для чисел, отрезков и площадей. Отсюда видно, что эта теория не опиралась на общее понятие величины, ее приходилось, по существу, отдельно строить для разных родов величин. Кроме того, в «старой» теории не удавалось определить общим образом операции над отношениями. Поэтому-то она и была оставлена.

Понятие величины, по Евдоксу, охватывает и числа и непрерывные величины: отрезки, площади, объемы. Оно вводится с помощью аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства. У Евклида эти аксиомы формулируются так:

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.
4. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. И целое больше части»¹.

Однако область величин, определяемых этими аксиомами, была еще слишком широкой, чтобы над ней можно было определить понятие отношения. Предварительно надо было изгнать актуально бесконечно малые и актуально бесконечно большие величины. Это Евдокс сделал, введя знаменитую аксиому, известную в математике также под именем аксиомы Архимеда:

«Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» («Начала», книга V, определение 4)². Иначе говоря, если даны две величины a и b , то должны существовать такие целые числа n и m , что $na > b$ и $mb > a$. Величины, для которых выполняется эта аксиома, мы будем, следуя традиции, называть архимедовыми. В Греции во времена Евдокса были хорошо известны «неархимедовы» величины — так называемые роговидные углы, примером которых может служить угол, ограниченный дугой окружности и касательной в одном из ее концов: увеличивая такой угол в любое число раз, мы

¹ Евклид. Начала, т. I. Перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., 1948, стр. 14.

² Там же, стр. 142.

не сможем превзойти угол между касательной и любой прямой, пересекающей ее в точке касания¹.

Для определения того, когда две пары архимедовых величин a, b и c, d имеют одно и то же отношение, Евдокс пользуется сопоставлением кратных этих величин (na, mb, nc и md):

«Говорят, что величины находятся в том же отношении первая ко второй и третьей к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке» («Начала», книга V, определение 5)².

Итак, величины a, b имеют то же отношение, что и c, d , если для любых целых m и n : 1) либо $ma > nb$ и $mc > nd$, 2) либо $ma = nb$ и $mc = nd$, 3) либо $ma < nb$ и $mc < nd$.

Две пары величин, имеющих одно и то же отношение, в «Началах» называются пропорциональными. В предложении V,11 доказывается, что если отношения $a:b$ и $c:d$ пропорциональны одному и тому же отношению $e:f$, то они пропорциональны и между собой. Следовательно, пропорциональность отношений обладает свойством транзитивности, которое было отмечено в аксиоме 1 для равенства величин. Из определения пропорциональности вытекает и ее симметричность, т. е. из пропорциональности отношений $a:b$ и $c:d$ следует пропорциональность отношений $c:d$ и $a:b$. Поэтому пропорциональность есть отношение типа равенства, т. е. в случае пропорциональности отношений $a:b$ и $c:d$ мы можем записать $a:b = c:d$.

Таким образом, все пары величин разбиваются на классы пропорциональных друг другу пар, и новый объект — отношение выступает как то общее, что имеют все пары величин некоторого класса. Такое определение нового объекта получило название определения через равенство.

Отношения Евдокс упорядочивает по величине: $a:b$ больше $c:d$, если существуют такие целые m и n , что $ma > nb$ и одновременно $mc \leq nd$ (книга V, определение 7).

Хотя теория отношений Евдокса была безупречно строга и ею, по существу, пользовались до конца прошлого века, объяснив вслед за Ньютоном отношения числами, однако вся глубина построения Евдокса была понята только после работ Р. Дедекинда, который во второй половине XIX в. ввел действительные числа как сечения в области рациональных чисел. Между теориями Евдокса и Дедекинда существует столь глубокая аналогия, что Р. Лишниц спрашивал Дедекинда в одном из писем, что же он сделал нового по сравнению с древним.

Остановимся подробнее на этой аналогии. Согласно Дедекинду, действительное число α определяется сечением во множестве рациональных чисел. Разбиение рациональных чисел на два класса A и B называется сечением, если:

- 1) кл.сы A и B не пусты;
- 2) каждое рациональное число принадлежит либо A , либо B , и притом только одному из них;
- 3) каждое число из A меньше любого числа из B .

¹ Об измерении и свойствах роговидных углов см. *Ф. Клейн*. Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II. Перевод под ред. Д. А. Крыжановского. М.—Л., 1934, стр. 336—342.

² *Евклид*. Начала, т. I, стр. 142.

Если сечение произведено, то логически возможны четыре случая:

- 1) в классе A есть наибольший элемент, а в классе B нет наименьшего;
- 2) в классе A нет наибольшего элемента, а в классе B есть наименьший;
- 3) в классе A нет наибольшего элемента, а в классе B нет наименьшего;
- 4) в классе A есть наибольший элемент, а в классе B есть наименьший.

Легко показать, что четвертый случай невозможен, так как он противоречит требованиям, определяющим сечение. Третий случай вполне возможен: например, к классу A отнесем все отрицательные числа, нуль и положительные, квадрат которых меньше 2, а к классу B — все остальные. (В этом случае сечение определяет новое действительное число, не являющееся рациональным.)

Вернемся теперь к определению Евдокса. Пусть задана пара архимедовых величин a, b . Будем пару целых чисел m, n относить к классу A , если $ma > nb$, и к классу B , если $ma \leq nb$. Тогда все пары целых чисел (у Дедекинда — рациональные числа!) разобьются на два класса, которые, как нетрудно видеть, не пересекаются и не пусты. Можно показать, что выполняется и аналог свойства 3, если только упорядочить пары (m, n) , но мы не будем на этом останавливаться. Если теперь задана пара величин c, d , то и она определит разбиение множеств пар целых чисел на два класса A' и B' , которое также является сечением. Согласно определению Евдокса, $a : b = c : d$, если A совпадает с A' , а $B = c B'$, т. е., если оба отношения производят одно и то же сечение множества пар целых чисел.

Далее, по Дедекинду, $\alpha < \beta$, если существует такое рациональное число n/m , что $\alpha < \frac{n}{m} < \beta$. По Евдоксу, $a : b > c : d$, если существуют такие m и n , что $ma > nb$ и $mc \leq nd$, т. е. $a : b > \frac{n}{m} \geq c : d$. Следовательно, и здесь определения, по существу, совпадают.

Однако между обеими теориями имеются и весьма глубокие отличия, обусловленные различиями характеров античной и современной математики. У Евдокса отсутствовала аксиома непрерывности, которую ввел Дедекинд: в его теории любое сечение области рациональных чисел определяет некоторое действительное число. У Евдокса отношение задается парой архимедовых величин, а затем уже строится сечение пар целых чисел. Ниоткуда не следует, что, наоборот, произвольному сечению будет отвечать пара величин $a : b$, которая и определяет это сечение.

Второе различие состоит в том, что Дедекинд оперирует с областью рациональных чисел, а Евдокс — с парами целых, для которых не определены ни арифметические операции, ни отношения порядка.

Мы не можем здесь дать даже приблизительное представление о той захватывающей красоте, с которой Евдокс развивает теорию отношений, и отойдем желающих к V книге «Начал» Евклида. Остановимся еще лишь на вопросе об операциях над отношениями.

Отношения и числа

В «Началах» над отношениями величин производится только одна операция — составление отношений, которая соответствует нашему умножению. Евклид не дает прямого определения этой операции, но называет отношение $a : c$ составленным из $a : b$ и $b : c$, что мы будем записывать в виде

$$(a : b) \otimes (b : c) = a : c.$$

Если $a:b = b:c$, то $a:c$ называется двойным, если $a:c$ составляется из трех одинаковых отношений, — тройным, и т. д. Наконец, если надо составить отношения $a:b$ и $c:d$, то в «Началах» используется существование четвертой пропорциональной — принцип, доказанный Евклидом только для частного случая, именно для отрезков. Для отношения $c:d$ отыскивается равное ему, первый член которого есть b :

$$c:d = b:x.$$

Величина x и есть четвертая пропорциональная к величинам c , d и b . Тогда

$$(a:b) \otimes (c:d) = (a:b) \otimes (b:x) = (a:x).$$

Заметим, что для введения обратной операции не требуется никаких специальных определений. Евклид доказывает, что если $a = b$, то $a:c = b:c$ и $c:a = c:b$. Он свободно пользуется «обращением» отношений, замечая (следствие к предложению V, 7), что из $a:b = c:d$ следует $b:a = d:c$.

В «Началах» устанавливаются два основных свойства операции составления отношений. В предложении V, 22 доказывается, что если $a:b = f:g$ и $b:c = g:h$, то $a:c = f:h$, т. е. результат операции составления не зависит оттого, какие именно представители берутся из класса пар величин, имеющих одно и то же отношение (аналогичное предложение, как мы видели, доказывалось и для отношения чисел). Операция составления отношений определяется, таким образом, не для отдельных пар величин, а для классов пропорциональных друг другу пар величин.

В предложении V, 23 показывается, что если $a:b = g:h$ и $b:c = f:g$, то $a:c = f:h$. Это предложение устанавливает коммутативность операции составления. Действительно, по определению

$$f:h = (f:g) \otimes (g:h).$$

Но по доказанному

$$f:h = a:c = (a:b) \otimes (b:c) = (g:h) \otimes (f:g).$$

Итак,

$$(f:g) \otimes (g:h) = (g:h) \otimes (f:g).$$

В современной математике любое множество M объектов $a, b, c, \dots$, в котором определен закон композиции $\otimes$, ставящий в соответствие любым двум элементам из M третий элемент из M :

$$a \otimes b = c,$$

называется группой, если этот закон удовлетворяет следующим условиям:

1) для любых трех элементов a, b, c из M

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

(закон ассоциативности);

2) существует такой элемент e , что для любого a из M

$$e \otimes a = a$$

(наличие единицы);

3) для каждого a из M существует такой элемент a^{-1} , что

$$a^{-1} \otimes a = e$$

(наличие обратного элемента).

Если, кроме того, для любых двух элементов a, b из M

$$a \otimes b = b \otimes a,$$

группа называется коммутативной или абелевой.

Все рациональные числа, отличные от нуля, образуют группу по умножению, причем единицей является число 1. Эта группа коммутативна. Другим примером группы могут служить все целые числа — положительные, отрицательные и нуль. Законом композиции здесь будет обычное сложение, роль единицы играет нуль, элементом, обратным к a , служит $-a$.

Доказанные Евклидом свойства операции составления отношений показывают, что рассматриваемые им отношения образуют группу и построенная группа коммутативна. Понятие группы позволяет дать более точное определение понятию поля, которым мы уже пользовались выше (см. стр. 70): множество M называется полем K , если в нем определены два закона композиции, которые мы будем называть условно «сложением» и «умножением» и обозначать соответственно $\oplus$ и $\otimes$, причем:

1) множество M является коммутативной группой по «сложению», и, следовательно, в нем существует элемент e , который мы будем называть «нулем»;

2) множество всех элементов из M , кроме «нуля», является коммутативной группой по «умножению»;

3) имеет место дистрибутивный закон «умножения» по отношению к «сложению»:

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c.$$

Примерами поля могут служить множество всех рациональных чисел, множество всех действительных чисел и множество всех комплексных чисел, а также различные расширения этих полей (например, расширение $Q(\sqrt{2})$ поля Q рациональных чисел).

Какую же функцию выполняли отношения в античной математике? Можно ли сказать, что они служили эквивалентом нашему понятию действительного числа?

Интересная точка зрения по этому поводу была недавно предложена Н. Бурбаки. По его мнению, над областью величин, которые образуют систему с одним внутренним законом композиции (сложением), Евдокс строит, по существу, систему операторов, которыми являются определенные им отношения. Эти операторы образуют коммутативную группу по умножению. При этом неявно предполагается, что если задано отношение $a : b$ и величина c , то существует величина d одного рода с c , и такая, что $a : b = c : d$. Это дает возможность отождествить области операторов, определенных для любых видов архимедовых величин, и прийти, таким образом, к универсальной области операторов.

Н. Бурбаки приходит к выводу, что греческие математики, имея сложение величин и умножение отношений величин, обладали по существу эквивалентом понятия поля, но только в менее удобной форме, чем мы.

Как бы то ни было, у Евдокса для отношений был определен лишь один закон композиции — составление, соответствующий умножению, так что система отношений образовывала не поле, а группу. В этом и состоит основное отличие отношений Евдокса от наших действительных чисел.

Второе отличие заключалось в том, что арифметико-вычислительная функция отношений в античной математике была развита слабо. Исключения составляют труды Архимеда, в которых проводятся виртуозные вычисления. Ситуация изменилась в первых веках нашей эры, когда в связи с развитием астрономии появилась необходимость в составлении таблиц хорд, соответствующих нашим таблицам синусов. В таких таблицах отношение хорды к радиусу $a : r$ выражалось с определенной степенью точности конечной шестидесятичной дробью, а операциям над отношениями соответствовало умножение таких дробей. Именно в эту эпоху ученые и начали рассматривать отношения как некие обобщенные числа. Явное расширение понятия числа произошло в математике стран ислама (XI—XIII вв.) и Европы (XVI—XVII вв.). В обоих случаях это находилось в непосредственной связи с грандиозным развитием вычислительной техники.

«Метод исчерпывания»

В основе «метода исчерпывания» Евдокса лежала следующая основная лемма: если даны две величины a и b , $a > b$, то, вычитая из величины a больше ее половины, из полученного остатка больше его половины и т. д., получим через конечное число шагов остаток $\alpha_n < b$. Эта лемма формулируется и доказывается в предложении X,1 «Начал» Евклида. Доказательство ее таково: на основании аксиомы Евдокса — Архимеда величину b можно повторить столько раз, что $Nb > a$. Повторим теперь N раз процесс выбрасывания из величины a и последовательных остатков $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, частей, превышающих их половины:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a - a_1 < \frac{a}{2}, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 - a_2 < \frac{\alpha_1}{2} < \frac{a}{4}, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_N &< \frac{\alpha_{N-1}}{2^{N-1}} < \frac{a}{2^N}, \end{aligned}$$

$2^N \alpha_N < a$. Но тогда $N \alpha_N < 2^N \alpha_N < a$.
Итак, $N \alpha_N < a < Nb$, т. е. $\alpha_N < b$.

В этой лемме рассматривается не конкретная последовательность заданных величин, а *любая* последовательность, удовлетворяющая некоторым условиям.

На основе этой леммы проводились доказательства по следующей схеме (которая в общем виде нигде не формулировалась): для определения неизвестной величины A некоторой фигуры (или тела) в нее вписывали монотонно возрастающую последовательность величин

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, \quad A_n < A, \tag{1}$$

площади которых известны, так, чтобы

$$\begin{aligned} A - A_1 &< \frac{A}{2}, \\ A - A_2 &< \frac{A - A_1}{2} < \frac{A}{4}, \\ &\dots\dots\dots \frac{A}{2^{n-1}}, \\ A - A_n &< \frac{A}{2^n}. \end{aligned}$$

Тогда по основной лемме при достаточно большом n разность

$$A - A_n \quad (2)$$

может быть сделана меньше любой заданной величины b .

Следующий шаг состоял в нахождении арифметического предела последовательности (1), т. е. такой величины B , что разность

$$B - A_n \quad (3)$$

для достаточно больших n становится как угодно малой. Оговоримся сразу же, что понятие предела в явной форме не вводилось.

Последний шаг состоял в доказательстве того, что $A = B$. Это соответствует нашему доказательству единственности предела последовательности: если $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$, то $A = B$.

Как и мы, древние доказывали это методом от противного. Если $A \neq B$, то либо $A < B$, либо $B < A$. В первом случае выбираем в качестве величины b разность $B - A$. По определению величины B при достаточно большом n $B - A_n < B - A$, но тогда $A_n > A$, что невозможно. Аналогично опровергается и предположение $A > B$.

Отличие приведенного рассуждения от современного состоит в том, что мы доказываем эту теорему для *любой* последовательностей, имеющих предел, древние же не выделили еще ни понятия последовательности, ни монотонно изменяющейся величины, ни предела. Они вынуждены были поэтому в каждой задаче для рассматриваемых конкретных величин A и B повторять все рассуждения заново, что, конечно, утяжеляло изложение.

С помощью своего метода Евдокс строго доказал следующие теоремы:

1) площади двух кругов относятся, как квадраты их диаметров (это предположение было известно еще Гиппократу Хиосскому);

2) объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ объема призмы с теми же основанием и высотой;

3) объем конуса равен $\frac{1}{3}$ объема цилиндра с теми же основанием и высотой. Напомним, что оба последних результата Архимед приписывает Демокриту, который, однако, не дал им строгого обоснования.

Евклид добавил к этому доказательство того, что объемы шаров относятся, как кубы их диаметров.

Однако только Архимед сумел с помощью метода Евдокса найти ряд новых площадей и объемов. При этом в своих ранних работах он придерживался той первоначальной схемы метода исчерпывания, о которой мы говорили. Приведем для иллюстрации метода знаменитую квадратуру параболы Архимеда.

Пусть дан косой сегмент параболы $ADBEC$ (рис. 22). Пусть в точке B касательная MN параллельна хорде AC . В качестве первой вписанной фигуры Архимед берет $A_1 = \triangle ABC$. В качестве второй — многоуголь-

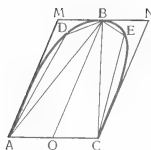


Рис. 22

ник $ADBEC$, являющийся суммой трех треугольников:

$$A_2 = \triangle ABC + \triangle ADB + \triangle BEC,$$

причем два последних вписаны в соответствующие сегменты параболы по тому же закону, что и треугольник ABC .

Архимед показывает, что

$$\triangle ADB + \triangle BEC = \frac{1}{4} \triangle ABC,$$

т. е.

$$A_2 = \triangle ABC + \frac{1}{4} (\triangle ABC) = A_1 + \frac{1}{4} A_1.$$

Продолжая вписывание, он получает

$$\begin{aligned} A_3 &= \triangle ABC + \frac{1}{4} \triangle ABC + \frac{1}{16} \triangle ABC = A_1 + \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{16} A_1, \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &= A_1 + \frac{1}{4} A_1 + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} A_1. \end{aligned}$$

Таким образом, вписанные величины являются последовательными суммами геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$.

Следующий шаг Архимеда состоит в доказательстве того, что разность $A - A_n$, где A — искомая площадь, может быть сделана меньше любой наперед заданной величины. Для этого он показывает, что $\triangle ABC$ равен половине описанного параллелограмма $AMNC$, а значит, больше половины A . То же имеет место и при дальнейшем вписывании, так что условия леммы Евдокса выполнены. Только после этого Архимед переходит к суммированию геометрической прогрессии (1). Уже сама последовательность предложений показывает, что эта сумма ищется для определения площади сегмента параболы. Архимед доказывает, что

$$A_n = A_1 + \frac{A_1}{4} + \dots + \frac{A_1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} A_1 - \frac{1}{3} \frac{A_1}{4^{n-1}},$$

т. е. устанавливает, что A_n с ростом n как угодно мало отличается от $\frac{4}{3} A_1 = B$.

Последний шаг заключается в доказательстве того, что $A = B$, методом от противного. Впоследствии Архимед существенно развил и усовершенствовал и сам метод, о чем мы будем говорить далее.

Заметим, что хотя «метод исчерпывания» и возник из задачи определения площадей и объемов, но элементы учения о пределах, которые в нем содержались, могли быть применены и для исследования других вопросов. Так, с его помощью, по существу, были доказаны некоторые теоремы о пределах. Например, было установлено, что если $a_n : b_n = k$, где k — постоянная и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad b \neq 0,$$

то

$$\frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \lim \frac{a_n}{b_n} = k.$$

Доказательство этой теоремы содержится в XII книге «Начал» Евклида, в предложении XII, 12 о том, что площади двух кругов Q и q относятся, как квадраты их диаметров D^2 и d^2 . Здесь, именно:

1) доказывается, что если A_n и B_n подобные многоугольники, вписанные соответственно в Q и q , то

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{D^2}{d^2};$$

2) с помощью леммы Евдокса устанавливается, что разности $Q - A_n$ и $q - B_n$ при достаточно большом n становятся как угодно малыми;

3) наконец, методом от противного доказывается, что

$$\frac{Q}{q} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Ученик Евдокса Динострат, исследуя квадратрису, имеющую в полярных координатах уравнение¹

$$\rho = \frac{2r}{\pi} \frac{\varphi}{\sin \varphi},$$

показал, что отрезок, который она отсекает на горизонтальной оси, равен $2r/\pi$, т. е., по существу, нашел, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = 1.$$

Наконец, Архимеду принадлежит доказательство следующего предложения теории пределов: если при любом n

$$u_n < z < v_n,$$

где z — некоторая постоянная величина, u_n — монотонно возрастающая, а v_n — монотонно убывающая последовательности величин, причем разность $v_n - u_n$ при достаточно большом n становится меньше любой наперед заданной величины, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z.$$

¹ В явном виде полярные координаты, конечно, в то время введены не были и уравнения не писались.

Свое доказательство, имеющее вполне общий характер, Архимед проводит для конкретных величин и не употребляет никаких общих понятий теории пределов.

Итак, «метод исчерпывания» древних представляет первое учение о пределах. В основе его лежит лемма, которая позволяет находить предел широкого класса последовательностей. Однако общая схема рассуждения еще не была сформулирована, она повторялась всякий раз заново для рассматриваемых конкретных величин.

Такое явление часто наблюдается в истории нашей науки; то же имело место при возникновении теории групп, теории полей и многих других. Лагранж, Гаусс, Руффини и Абель доказывали совершенно общие теоремы теории групп и полей, но только для конкретных групп подстановок корней уравнения или групп классов квадратичных форм. При этом само понятие группы еще не было определено, доказательства одних и тех же теорем повторялись много раз, и всякий раз способ доказательства был намного более общим, чем формулируемый результат.

ПЯТАЯ ГЛАВА

ЭЛЛИНИСТИЧЕСКИЕ СТРАНЫ И РИМСКАЯ ИМПЕРИЯ

Наука в эллинистических странах

Новая эпоха античного мира началась с завоеваний Александра Македонского. После завоевания городов-государств материковой Греции его отцом Филиппом Александр переносит войну за пределы Греции и за 332—323 гг. до н. э. покоряет Египет, Вавилон, Персию, среднеазиатские государства Согдиану и Бактрию, а также часть Индии до реки Инда. После смерти Александра его империя распалась на несколько больших частей — эллинистических монархий, правящие династии которых были основаны полководцами Александра. Важнейшими из этих государств были царства Птолемеев в Египте и Селевкидов в Азии. Государственным языком в эллинистических государствах становится греческий, на этом же языке начинается развиваться наука. Столица Птолемея Александрия, основанная в 331 г. до н. э., вскоре становится торговым, культурным и научным центром всего древнего мира. Птолемей I основал в Александрии Мусейон — дом Муз, в который были приглашены крупнейшие ученые мира.

Условия развития науки в птолемеевском Египте были совершенно иными, чем в городах-государствах древней Греции. В Афинах и других городах Эллады гражданам было обеспечено только «среднее» образование, никаких государственных учреждений, аналогичных современным академиям или университетам, там не было. Молодые люди, желающие пополнить свои знания, собирались вокруг знаменитого ученого или философа, который вел преподавание устно. Книга в классической Греции была большой редкостью и стоила очень дорого. В IV в. до н. э. были организованы Академия Платона, а затем Ликей Аристотеля, где впервые читались систематические лекции. Аристотель также впервые начал собирать библиотеку. Все эти школы не поддерживались государством и были независимы от него.

Напротив, в Александрии Мусейон субсидировался государством и ученые получали жалованье. При Мусейоне была собрана богатейшая библиотека, в основу которой, по преданию, была положена библиотека Аристотеля. К I в. н. э. библиотека насчитывала более 700 000 рукописей. Сюда стекались для учебы молодые люди со всего мира, приезжали работать видные ученые. Итак, основой обучения становится книга. Вместе с тем Мусейон лишился той самостоятельности, которой обладала Академия Платона и Ликей Аристотеля, главный жрец (директор) Мусейона назначался Птолемеем.

В древней Греции научные проблемы пользовались большой популярностью: о задаче удвоения куба, как мы видели, была сложена легенда, задача квадратуры круга была настолько известна, что острофы о ней по-

пали в комедию Аристофана «Птицы». В Александрии положение изменилось: основная масса населения — египтяне — даже не понимала языка, на котором писались научные и литературные произведения. Такая изоляция губительно сказалась на художественной литературе, которая ограничивалась в основном подражанием классическим образцам. Ничего сравнимого с трагедиями Эсхила, Софокла и Еврипида или с комедиями Аристофана здесь создано не было, зато развивались филология, критические и исторические исследования. Но особенный расцвет в III—II вв. до н. э. получили точные науки.

Прежде всего следует отметить успехи астрономии, обусловленные синтезом науки Греции и Востока, главным образом Вавилона. В Вавилоне издавна велись астрономические наблюдения, составлялись каталоги звезд, вычислялись подробные астрономические таблицы. При этом вавилонские ученые пользовались удобной шестидесятиричной системой счисления. В Греции, как мы видели, возникли первые астрономические теории и были созданы первые модели солнечной системы. Астрономы Александрии объединили в своем творчестве и то и другое направление: они продолжали вести точные наблюдения и составлять подробные таблицы и одновременно разрабатывали теории, обобщавшие эти более точные наблюдения. Так, Аполлоний для объяснения видимого движения планет построил теорию эпициклов и эксцентрических окружностей, на основе которой Гиппарх и Клавдий Птолемей создали «птолемееву» систему мира. Именно с астрономией было связано развитие плоской и сферической тригонометрии, сферической геометрии, а также существенное развитие приближенных вычислений, в которых была использована шестидесятиричная система дробей.

Математические методы в эту эпоху проникли не только в астрономию. Архимед построил с их помощью начала статики и гидростатики. Евклид, Архимед и Аполлоний развивали геометрическую оптику, Евклид занимался теорией музыки.

Большие успехи сделала и география. Ученый-энциклопедист Эратосфен из Кирены — математик, географ, историк, филолог и поэт (его называли «шентатлосом», т. е. пятиборцем) — предпринял новое измерение длины градуса меридиана, что позволило ему установить более точные размеры Земли. Эратосфену принадлежат и интересные математические исследования: он предложил новое механическое решение задачи удвоения куба, занимался теорией чисел, где прославился изобретением «решета Эратосфена» для «отсеивания» простых чисел.

В III в. до н. э. одновременно с ним жили и работали такие гении, перед трудами которых меркнут все просто хорошие или даже очень хорошие работы. Мы имеем в виду Евклида, Архимеда и Аполлония.

Евклид

Мы почти ничего не знаем о Евклиде. Неизвестно, откуда он был родом, где и у кого учился. Такое беспрецедентное отсутствие сведений побудило даже одного историка науки (речь идет о Ж. Итаре) предположить, что имя Евклида служило псевдонимом для группы александрийских математиков, что Евклид был Никола Бурбаки древности.

Все же у нас нет оснований сомневаться в существовании Евклида, тем более что в этом не сомневались и позднейшие греческие ученые, кое что

рассказывавшие о его характере. Папп сообщает, что он был очень доброжелателен ко всем тем, кто сделал хоть какой-нибудь вклад в математику, корректен, в высшей степени порядочен и совершенно лишен тщеславия. Большую принципиальность Евклида подчеркивают и два следующих анекдота о нем. Как-то царь Птолемей I спросил Евклида, нет ли более короткого пути для изучения геометрии, чем штудирование «Начал». На это Евклид смело ответил, что «в геометрии нет царской дороги». Другой исторический анекдот повествует о том, что один из юношей, изучив первое предложение «Начал», спросил у Евклида: «А что я могу заработать, выучив все это?» Евклид позвал раба и сказал: «Дай ему три обола, так как бедняжка хочет заработать деньги своим учением».

Гораздо больше мы знаем о математическом творчестве Евклида. Прежде всего Евклид является для нас автором «Начал», по которым учились математики всего мира.

В дальнейшем мы будем говорить о «Началах», теперь же посмотрим, что еще интересовало Евклида.

Его глубоко занимали вопросы логических основ математики, и одно из его сочинений, которое до нас не дошло, называлось «Ложные заключения». В книге «Данные» Евклид исследовал вопрос о том, каково должно быть минимальное число заданных величин, чтобы сделать некоторую задачу определенной. Он еще до Аполлония написал трактат о конических сечениях — наиболее полное и систематическое изложение учения об этих кривых.

Евклид, как и другие великие греческие геометры, занимался астрономией, оптикой и теорией музыки. До нас дошли его сочинения, посвященные прикладным вопросам: «Феномены» (элементарная сферическая астрономия), «Оптика» (учение о перспективе) и «Сечение канона» (теория музыки). Это были первые прообразы будущих исследований по математической физике: в них теория выводилась строго дедуктивно из явно сформулированных физических гипотез и математических постулатов.

«Начала» Евклида

Эта удивительная книга пережила более двух тысячелетий, но до сих пор не утратила своего значения не только в истории науки, но и в самой математике. Созданная там система евклидовой геометрии и теперь изучается во всех школах мира и лежит в основе почти всей практической деятельности людей. На геометрии Евклида базируется классическая механика, ее апофеозом было появление в 1687 г. «Математических начал натуральной философии» Ньютона, где законы земной и небесной механики и физики устанавливаются в абсолютном евклидовом пространстве.

Содержание «Начал» далеко не исчерпывается элементарной геометрией — это основы всей античной математики. Здесь подводится итог более чем 300-летнему ее развитию и вместе с тем создается прочная база для дальнейших исследований. Последующие математики ссылались на предложения «Начал», как на нечто окончательно установленное. Какие же области математики выбрал Евклид в качестве элементов? Это планиметрия и стереометрия, геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений, теория чисел, учение об отношениях чисел и отношениях

величин, классификация квадратичных иррациональностей, метод исчерпывания.

В «Начала» не вошли ни учение о конических сечениях, ни исследования, связанные со знаменитыми задачами древности, ни квадратуемые луночки Гипократа Хиосского. Там не рассматриваются также вопросы приближенных вычислений. Таким образом, «Начала» не являются энциклопедией античной математики. Видимо, цель Евклида при написании тринадцати книг «Начал» была близка к той, которой в наши дни руководствовался Н. Бурбаки при создании своих многотомных «Элементов математики», а именно: дать описание тех основных элементов, на основе которых могут быть развиты все разделы современной ему математики; кстати, название трактата Н. Бурбаки непосредственно указывает на связь с Евклидом (по-французски книга Евклида называется «Les éléments»).

Посмотрим, как решает эту задачу Евклид.

Заметим, что идея составления «Начал» не принадлежит самому Евклиду. Как сообщает Прокл, и до Евклида были сочинения такого рода. Первые «Начала» были написаны Гиппократом Хиосским, а затем Леоном и Фейдием, принадлежавшими к школе Платона. Несомненно, что и до Евклида сложились определенные традиции, определенные схемы, по которым писались такие книги. Но «Начала» Евклида оказались, по-видимому, настолько совершеннее своих предшественников, что полностью затмили их и вытеснили из обихода. Во всяком случае, последующие античные математики ссылались только на «Начала» Евклида.

Аксиоматика

«Начала» Евклида состоят из тринадцати книг. Каждая книга начинается с определений; кроме того, первой книге предшествует пять постулатов и пять аксиом (в некоторых списках приводятся еще четыре аксиомы).

Определения «Начал» можно разбить на две группы: рабочие определения, которые используются при построении теории (например, определение равенства двух отношений или определения прямого угла), и описательные, которые далее не употребляются (например, «точка есть то, что не имеет частей» или «линия же — длина без ширины»). Последние, быть может, были попыткой ввести размерность величин: точки — как нулевой величины, линии — как одномерной.

В настоящее время, следуя Д. Гильберту, такие основные понятия, как «точка», «прямая», «плоскость», определяются системой аксиом в целом, причем под «точками» можно понимать не только те геометрические образы, которые мы с ними связываем, но и, например, пару действительных чисел (x, y) , под прямой — множество пар, удовлетворяющих уравнению $Ax + By + C = 0$, и т. д.

Постулаты «Начал» таковы:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно

но эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых»¹.

Первые три постулата описывают простейшие построения, которые можно осуществить с помощью циркуля и линейки. Четвертый постулат обеспечивает единственность продолжения прямой. Наконец, пятый постулат — знаменитый постулат о параллельных². На первый взгляд, он не имеет отношения к построениям, однако на деле обеспечивает существование точки пересечения у двух прямых, удовлетворяющих сформулированным условиям.

Аксиомы «Начал» описывают общие свойства равенства и неравенства величин, — мы привели их выше (стр. 96). Все аксиомы, кроме четвертой, относятся не только к геометрическим величинам, но и к числам вообще, ко всем величинам, подчиняющимся аксиомам Евдокса. Четвертая аксиома — «совмещающиеся равны» — является единственной, в которой говорится о возможности движения — совмещения.

Выбор постулатов и аксиом очень удачен. Почти все они вошли в современную аксиоматику. Однако постулатов и аксиом «Начал» недостаточно для дедуктивного построения геометрии. Евклид не сформулировал многого из того, чем он пользуется в дальнейшем. Так, в «Началах» нет стереометрических постулатов. За исключением четвертой аксиомы, там нет и аксиом движения. Между тем в геометрии Евклида изучаются по существу инварианты движений твердого тела.

При построении геометрии необходимо поэтому либо определить, какие допускаются движения, либо ввести аксиомы конгруэнтности, с помощью которых определяется равенство фигур, и тогда движениями будут точечные взаимно однозначные преобразования, которые переводят прямые в прямые и не нарушают равенства фигур. У Евклида нет ни того, ни другого. Между тем, в доказательствах он пользуется перемещением фигур (например, в предложении I, 4 при доказательстве признака равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними), а в определениях шара, конуса и цилиндра — вращением (соответственно полукруга, треугольника и прямоугольника). Заметим, что формулировка аксиом движения в то время представляла почти непреодолимые трудности. Недостаток этих аксиом, видимо, ощущался Евклидом, и он старался как можно меньше пользоваться движением.

У Евклида имеется только одно из предположений (оно дано в виде 4-го определения V книги), относящееся к тому, что теперь называют аксиомами непрерывности, — это аксиома Евдокса — Архимеда, о которой

¹ Евклид, «Начала», т. I, стр. 14—15.

² Пятый постулат удивлял ученых сложностью своей формулировки. Он походил более на теорему, чем на постулат. Уже в древности его пытались заменить другим, более очевидным предложением. Так, у Прокла (V в. н. э.) встречается формулировка постулата о параллельных, которая вошла теперь во все школьные курсы: через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определенной этой точкой и этой прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую заданной. Евклиду безусловно должны были быть известны различные формы постулата о параллельных. Почему же он выбрал из них такую сложную? Совсем недавно все эти вопросы получили новое освещение. В 1966 г. И. Тот на основании анализа нескольких текстов Аристотеля пришел к заключению, что в античной математике до Евклида изучались геометрические системы, в которых сумма углов треугольника не равна двум прямым углам, а больше или меньше этой величины. Такие системы в XIX в. получили название неевклидовых. Согласно И. Тоту, греки знали многие предложения неевклидовой геометрии (см. литературу в конце книги).

мы уже говорили. Второй из аксиом этой группы могла бы быть аксиома о существовании общей точки у последовательности вложенных один в другой стягивающихся отрезков или аксиома полноты Дедекинда. Этих аксиом не только нет в «Началах», но они нигде не используются в тексте. Создается впечатление, что точка зрения непрерывности чужда Евклиду. В его геометрии нельзя доказать существования квадрата, равновеликого кругу, потому что такой квадрат не может быть построен циркулем и линейкой. Этому нисколько не противоречит то обстоятельство, что задачи на построения Евклид решает, находя точки пересечения прямых и окружностей, т. е. как будто пользуется непрерывностью этих линий. На самом деле, как мы видели, каждое такое построение эквивалентно решению нормальной цепочки квадратных уравнений. Все построения Евклида выполнимы над минимальным полем, в котором разрешимо любое уравнение $x^2 = a^2 + b^2$. Такое поле в настоящее время называют пифагоровым и обозначают Ω . Построение такого поля Ω намечено Евклидом в X книге; разница, по существу, состоит лишь в том, что Евклид рассматривает только положительные числа. Поэтому ему приходится разбирать различные частные случаи, зависящие от взаимного расположения точек на прямой.

В V и VI книгах Евклид оперирует отношениями любых величин — он строит там, по существу, теорию действительного числа и теорию меры. В XII книге он находит отношения площадей двух кругов, конуса и цилиндра, пирамиды и призмы, наконец, двух сфер. При этом ему как будто приходится выйти из поля Ω : площадь круга, например, не принадлежит этому полю. Однако Евклид и здесь рассматривает только такие отношения, которые лежат в Ω . Так, он не рассматривает отношения площади круга к квадрату диаметра (т. е. $\pi/4$), но показывает, что отношение площадей двух кругов равно отношению квадратов их диаметров, т. е. лежит в Ω , если сами диаметры есть величины из Ω . В остальном все построения Евклида проводятся над пифагоровым полем Ω , для их выполнения по самому существу дела континуум математического анализа является излишним. С этой точки зрения «Начала» можно интерпретировать как глубоко алгебраическое произведение.

Однако предложения самого Евклида допускают выход за пределы пифагорова поля. Так как, например, из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ вытекает пропорция $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, то из теоремы о пропорциональности кругов квадратам, построенным на их диаметрах, следует, что можно говорить об отношении круга к описанному квадрату, а оно равно $\pi/4$. Во всяком случае, все преемники Евклида понимали евклидову геометрию как геометрию непрерывных образов и движений. В такой геометрии одной аксиомы Евдокса — Архимеда было недостаточно, на что впервые указал еще Лейбниц.

Тринадцать книг «Начал»

Первые четыре книги «Начал» посвящены планиметрии и геометрической алгебре. Особенность их в том, что не применяется учение о подобии, т. е. они строятся без действительных чисел.

В I книге излагается планиметрия прямолинейных фигур; в ней устанавливаются основные свойства треугольников, прямоугольников,

трапеций и доказывається, например, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, что углы при основании равнобедренного треугольника равны и т. д. Венчает книгу теорема Пифагора и обратное ей предложение. Поскольку книга строится без общей теории отношений, все теоремы о площадях формулируются как предложения о равновеликости. Так, вместо привычного нам предложения о том, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, доказывається, что треугольник равновелик половине прямоугольника, имеющего с ним равные основания и высоту.

Во II книге излагаются элементы геометрической алгебры. Произведение двух отрезков здесь понимается как построенный на них прямоугольник. Уже упоминалось, что в этой книге устанавливаются основные тождества и доказывається закон дистрибутивности умножения по отношению к сложению.

Обе первые книги восходят к пифагорейцам.

В III книге рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд. Эти вопросы были исследованы еще Гиппократом Хиосским или ранее.

Наконец, в IV книге строятся правильные n -угольники при $n = 3, 4, 5, 10, 15$, причем исключительно изящное построение правильного 15-угольника принадлежит, по-видимому, самому Евклиду.

V книга посвящена общей теории отношений величин Евдокса. Она отличается особенной стройностью и логической завершенностью.

В VI книге Евклид строит учение о подобии и прилагает его к задачам, равносильным решению квадратных уравнений вида

$$\frac{b}{c} x (a \pm x) = S.$$

В этих книгах вводится новый закон композиции — составление отношений — и устанавливаются его свойства; об этом подробно говорилось ранее.

В VI книге Евклид связывает составление отношений с операцией умножения отрезков, а именно: если $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — равноугольные параллелограммы, то в предложении VI, 23 доказывається, что

$$\frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } A'B'C'D'} = \left(\frac{AB}{A'B'} \right) \otimes \left(\frac{CD}{C'D'} \right).$$

В частности, если эти параллелограммы прямоугольны, то

$$\frac{AB \times CD}{A'B' \times C'D'} = \left(\frac{AB}{A'B'} \right) \otimes \left(\frac{CD}{C'D'} \right).$$

Книги VII—IX посвящены арифметике, т. е. теории целых и рациональных чисел. Каждое целое число изображается отрезком, полученным повторением единичного. Сложение чисел сводится к сложению изображающих их отрезков.

Для чисел-отрезков вводится новый (третий по счету) закон композиции: произведением числа $A = aE$ (где a показывает, сколько раз была повторена единица E для получения A) на $B = bE$ называется число $C = bA$. При таком несимметричном определении закона композиции, естественно, Евклиду приходится доказывать, что

$$AB = BA,$$

т. е.

$$bA = aB.$$

Четвертый закон композиции, аналогичный второму, определяется на множестве отношений целых чисел. Мы будем обозначать его, как и прежде, символом $\otimes$. Евклид устанавливает его связь с умножением целых чисел. Он доказывает, что

$$(AA_1) : (BB_1) = (A : B) \otimes (A_1 : B_1),$$

где AA_1 и BB_1 — произведения целых чисел.

Таким образом, Евклид выявляет тесные связи между всеми введенными им законами композиции.

В арифметических книгах, помимо изучения сложения и умножения целых чисел и умножения их отношений, рассматриваются вопросы теории чисел: вводится «алгоритм Евклида», доказываются основные теоремы теории делимости целых чисел, наконец, доказывается знаменитая теорема Евклида о том, что существует бесконечно много простых чисел.

Приведем последнее доказательство. Допустим, что существует только конечное число простых чисел: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Рассмотрим число $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Оно является либо простым, и тогда мы получаем новое простое число $q \neq p_1, \dots, p_n$, либо составным, и тогда делится на некоторое простое q , которое, как легко видеть, не может совпадать ни с одним из p_i .

В X книге на основании учения о целых и рациональных числах Евклид, следуя Тезету, проводит классификацию квадратичных иррациональностей, которые возникают при решении цепочек квадратных уравнений. Здесь намечается построение того пифагорова поля, о котором уже говорилось. В этой же книге доказывается, что соизмеримые величины относятся, как число к числу. В сущности, этим множеством рациональных чисел вкладывается в множество всех действительных.

Иногда Евклида упрекают за то, что он изложил теорию отношений дважды: для любых величин в V книге и для целых чисел в VII—IX книгах. Г. Цейтен объяснял это тем, что «общая теория пропорций, изложенная в пятой книге, была еще слишком нова и недостаточно поэтому развита»¹. Он считал, что «сохранившееся в седьмой книге учение о пропорциях представляет образец более старого подхода к вопросу». Между тем такое «повторение» вовсе не нуждается в специальных объяснениях: оно диктуется со строгой необходимостью нуждами самой математики. Конечно, построив общую теорию отношений, Евклид тем самым охватил и отношения соизмеримых величин, однако для изучения самого множества рациональных чисел необходимо было дать ему отдельное *независимое* определение. Это и сделал Евклид, это же делаем и мы. Только таким путем и можно изучать рациональные числа и их алгебраические расширения, получаемые присоединением к рациональным числам корней алгебраических уравнений, что и делается (для частного случая) в X книге. Эта книга наиболее длинна и трудна для понимания. Здесь больше всего ощущается недостаток в удобной символике.

XI книга посвящена стереометрии. Она содержит основные предложения о прямых и плоскостях в пространстве, задачи на построение (например, опустить из данной точки на данную плоскость перпендикуляр), а также предложения о равновеликости параллелепипедов и призм.

¹ Г. Г. Цейтен. История математики в древности и в Средние века. Перевод П. С. Юшкевича. М.—Л., 1938, стр. 108.

В XII книге с помощью метода исчерпывания доказано, что площади кругов относятся, как квадраты их диаметров, объемы пирамид и конусов сравниваются с объемами соответствующих призм и цилиндров, и, наконец, выводится, что объемы шаров относятся, как кубы их диаметров.

XIII книга посвящена построению пяти правильных многогранников — тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра, выражению их ребер через радиус описанной сферы с помощью иррациональностей X книги и доказательству того, что других правильных тел не существует. Основные результаты этой книги принадлежат Теэтету.

Позднее к «Началам» стали нередко присоединять еще две книги — XIV и XV. Первая из них была написана во II в. до н. э. Гипсиклом и посвящена сравнению объемов и поверхностей додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну и ту же сферу. Вторая была составлена в школе Писидора Милетского в VI в. н. э. и содержит некоторые предложения о правильных многогранниках.

Мы постарались здесь дать хотя бы самое общее представление о замечательном богатстве содержания, стройности и монолитности «Начал». В заключение приведем слова Альберта Эйнштейна о «Началах»: «Это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением»¹.

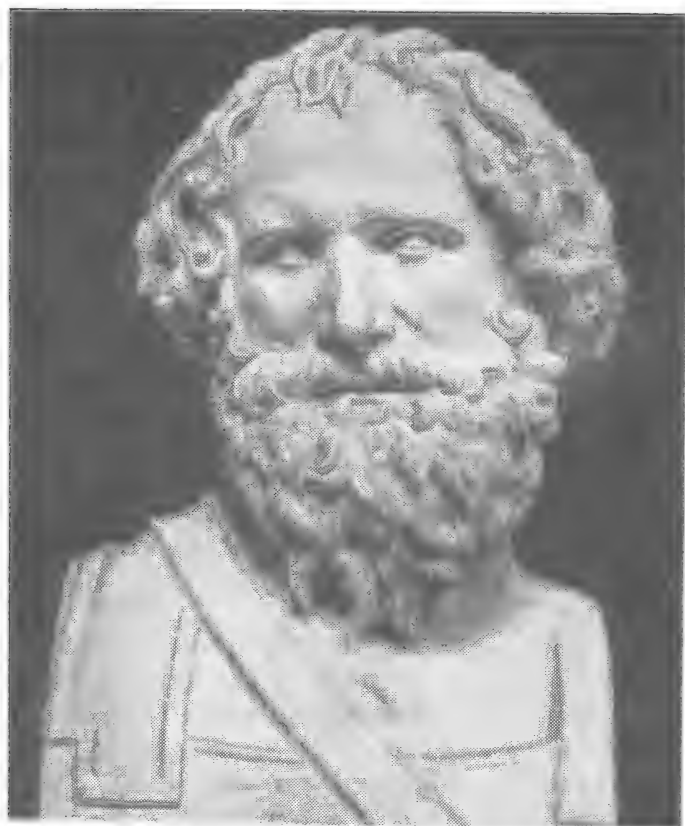
Влияние «Начал» на развитие математики было колоссальным. Мы уже говорили, что Архимед, Аполлоний и другие античные математики опирались на них при своих исследованиях по математике и механике. В конце VIII — начале IX в. появились первые переводы «Начал» на арабский язык, в первой четверти XII в. — на латинский язык. II в странах ислама, и в Европе Средних веков «Начала» служили настольной книгой каждого серьезного математика; их многократно переписывали, переиздавали печатно, комментировали, а также перерабатывали для преподавания.

Первое издание «Начал» на русском языке вышло в 1739 г., последнее — в 1948—1950 гг. В историко-математической литературе до сих пор не перестают появляться все новые толкования как отдельных мест «Начал» так и их общей структуры в целом. При этом с каждой эпохой в развитии нашей науки связано все более глубокое понимание великой книги Евклида.

Архимед

Архимед принадлежит к числу тех немногих гениев, творчество которых определило на долгие века судьбу науки, а тем самым и судьбу человечества. В этом он схож с Ньютоном. Между творчеством обоих великих гениев можно провести далеко идущие параллели. Те же области интересов: математика, физика, астрономия, та же невероятная сила ума, способная проникать в глубь явлений, наконец, та же популярность среди самой широкой публики. Действительно, среди всех математиков и физиков только имена Архимеда и Ньютона известны всему куль-

¹ А. Эйнштейн. Физика и реальность. М., 1965, стр. 62.



Архимед
(Неаполь, Национальный музей)

турному человечеству, только с ними связано такое количество легенд и анекдотов.

Архимед родился в 287 г. до н. э. в богатом торговом городе Сиракузы в Сицилии. Отец его был астроном Фидий, который, по-видимому, с детства привил сыну любовь к математике, механике и астрономии. Вероятно, Архимед ездил в Александрию и работал в ее знаменитой библиотеке. Там он познакомился с александрийскими учеными, с которыми потом переписывался до конца жизни. Он писал астроному Конону, а после смерти его — Досифею и Эратосфену. Эти письма напоминают современные научные мемуары. Каждое письмо обычно посвящено одной теме, в нем сообщаются только новые результаты, которые излагаются безупречно строго.

Иногда Архимед сообщал свои теоремы без доказательств, чтобы доставить математикам удовольствие самим обосновать их. Желая проверить действительные знания александрийцев, Архимед добавлял порой несколько ложных предположений для того, «чтобы тех, которые утверждают, что они все открыли, и не приводят никаких доказательств открытого можно было уличить и заставить согласиться с тем, что они открыли невозможное»¹.

¹ *Архимед*. Сочинения. Перевод И. Н. Веселовского. М., 1962, стр. 227.

Письма Архимеда показывают, как напряженно он работал по возвращении в Сиракузы. И не только как теоретик — об этой стороне его творчества мы скажем дальше. До нас дошли рассказы и о замечательных изобретениях и конструкциях Архимеда. Еще будучи в Египте, он изобрел так называемый бесконечный винт («улитка Архимеда») для вычерпывания воды, который и до сих пор употребляется во всей Северной Африке.

Сохранилось предание, что Архимед построил машину, с помощью которой одним движением руки сдвинул с места тяжело нагруженный корабль и без труда протащил его по суше. Трудно поверить, что дело обстояло в точности так. Во всяком случае, с теорией рычага была связана приписываемая Архимеду крылатая фраза: «Дайте мне точку опоры — и я сдвину мир». Несомненно, что Архимед сконструировал также планетарий (или «небесную сферу»), в котором можно было наблюдать фазы Луны, движение планет, затмение Солнца и Луны. Планетарий этот, по-видимому, приводился в движение водой. Впоследствии его перевезли в Рим, где его видел и описал Цицерон.

Гений Архимеда как инженера и изобретателя особенно проявился во время осады Сиракуз римлянами. Архимед употребил все силы для защиты родного города. Изобретенные им мощные метательные машины забрасывали римлян каменными ядрами и стрелами. Думая, что они будут в безопасности у самых стен города, римляне кинулись туда, но в это время вступили в строй легкие метательные машины близкого действия и забросали их градом ядер. Мощные краны захватывали железными крюками носы кораблей, поднимали их вверх, а затем бросали вниз, так что корабли переворачивались и тонули. По рассказу Плутарха, римские солдаты были так напуганы, что «едва заметив на стене веревку или кусок дерева, они поднимали отчаянный крик и пускались наутек в полной уверенности, что Архимед наводит на них какую-то машину»¹. Римляне вынуждены были отказаться от мысли взять город штурмом и перешли к его осаде. Знаменитый историк древности Полибий писал: «Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело... римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъясился из среды сиракузян одного старца»². Только из-за измены Сиракузы были взяты римлянами осенью 212 г. до н. э. При этом был убит Архимед. Плутарх сохранил нам яркий рассказ о его смерти: «В тот час Архимед внимательно рассматривал какой-то чертеж и, душою и взором погруженный в созерцание, не заметил ни вторжения римлян, ни захвата города, когда вдруг перед ним вырос какой-то воин и объявил ему, что его зовет Марцелл. Архимед отказался следовать за ним до тех пор, пока не доведет до конца задачу и не отыщет доказательства. Воин рассердился и, выхватив меч, убил его»³. Согласно желанию Архимеда, на его могиле был высечен шар, вписанный в цилиндр. По этому признаку могила Архимеда была разыскана через полтора столетия Цицероном; разыскать ее теперь не смогли.

Большая широта научных интересов, характерная для всех великих геометров Греции, с особой силой проявилась в творчестве Архимеда. Наиболее тонкие математические методы своего времени он прилагал к исследованию задач теоретической механики и гидростатики. Наоборот, сами теоремы механики, особенно принцип рычага, служили ему для от-

¹ Плутарх. Сравнительные жизнеописания, т. I. М., 1961, стр. 393.

² Полибий. Всеобщая история в сорока книгах, т. II. М., 1895, стр. 127.

³ Плутарх. Сравнительные жизнеописания, т. I, стр. 395.

крытия новых математических истин. Наконец, Архимед сумел строго теоретически исследовать приемы приближенных вычислений, применив к ним аппарат неравенств.

Мы не сможем здесь дать представление о работах Архимеда, относящихся к астрономии и механике. Скажем только несколько слов о некоторых из них.

Из механических работ Архимеда до нас дошла полностью только одна — «О равновесии плоских фигур, или о центрах тяжести плоских фигур». В этом сочинении, положившем начало статике как науке, Архимед, исходя из явно сформулированных физических посылок, с помощью общей теории отношений Евдокса — Евклида, выводит знаменитый закон рычага: величины (веса которых могут быть как соизмеримыми, так и несоизмеримыми) уравниваются, если расстояния их от точки опоры обратно пропорциональны весам. Этот закон он применил впоследствии для нахождения новых площадей и объемов.

В сочинении «О плавающих телах» Архимед сформулировал основной закон гидростатики, носящий ныне его имя, и нашел положения устойчивого равновесия прямого сегмента параболоида вращения. Он исходил при этом из очевидно необходимого условия равновесия, заключающегося в том, что центр тяжести вытесненного объема жидкости, к которому приложена равнодействующая давления жидкости, и центр тяжести всего тела лежат на одной вертикали (иначе сила тяжести и сила давления жидкости образовывали бы пару, которая вывела бы тело из исходного состояния). Для определения положений устойчивого равновесия, т. е. таких, в которые тело возвращается при небольших отклонениях, Архимед предпринимает дополнительные исследования. При этом он рассматривает, по существу, аналог так называемой поверхности центров, которая была введена Ш. Дюпеном в начале XIX в. Вплоть до работ Дюпена и А. Ю. Давидова эти глубокие исследования Архимеда не получили существенного развития, хотя определением положений устойчивого равновесия занимались такие ученые, как Стевин, Эйлер и Лагранж.

Архимед занимался также геометрической оптикой. О его «Катоптрике» мы знаем со слов римского архитектора Витрувия, который сообщает, что там рассматривались вопросы об изображении предметов в плоских, выпуклых и вогнутых зеркалах, о зажигательных зеркалах, о причине радуги. Архимеду было известно, что угол падения светового луча равен углу отражения.

Несмотря на глубокий интерес Архимеда к вопросам механики и оптики, основным делом его жизни была математика. По словам Плутарха, Архимед был просто одержим ею. Часто он забывал о пище и совершенно не заботился о себе.

Остановимся прежде всего на исследованиях Архимеда по «математическому анализу».

Интегральные методы Архимеда

В сочинениях «О шаре и цилиндре», «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах» Архимед применил метод верхних и нижних интегральных сумм, которые мы теперь называем суммами Римана или Дарбу.

Пусть требуется найти величину V некоторой фигуры (это может быть объем или площадь). Архимед вписывает в эту фигуру и описывает вокруг

нее ступенчатые фигуры, состоящие из элементарных частей, величины которых известны. Суммируя эти части, он получает объем или площадь описанной $\bar{S}$ и вписанной $\underline{S}$ фигур. Тогда

$$\underline{S} < V < \bar{S}.$$

Архимед устанавливает, что разность $\bar{S} - \underline{S}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточном увеличении числа элементарных частей и уменьшении их величин, и находит искомую величину как общий предел обеих сумм $\underline{S}$ и $\bar{S}$. Хотя он и не отмечает это особо, однако во всех рассмотренных им случаях суммы $\underline{S}$ монотонно возрастают, а $\bar{S}$ монотонно убывают.

В сочинении «О коноидах и сфероидах», в котором определяются объемы сегментов эллипсоидов, параболоидов и двуполостных гиперболоидов вращения, Архимед доказывает следующую общую лемму (предложение XIX), заменившую ему основную лемму Евдокса: «Если дан сегмент какого-нибудь из коноидов, отсеченный перпендикулярной к оси плоскостью, или же сегмент какого-нибудь из сфероидов, не больший половины этого сфероида и точно так же отсеченный, то можно вписать в него телесную фигуру и описать около него другую, состоящую из имеющих равную высоту цилиндров, и притом так, чтобы описанная фигура была больше вписанной на величину, меньшую любой наперед заданной телесной величины»¹.

Архимед доказывает это, опираясь на лемму Евдокса.

Для нахождения площадей и объемов Архимед пользуется соотношениями, которые в современной записи имеют вид

$$\sum_{v=1}^n v h = \frac{n(n+1)}{2} h, \quad (1)$$

$$\sum_{v=1}^n (v h)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} h^2, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin k\theta = \frac{(1 - \cos n\theta) \cos \frac{\theta}{2} - \sin n\theta \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (4)$$

При этом формулу (2) он применил в трех случаях: для нахождения объемов сегментов эллипсоида и гиперболоидов вращения, а также площади первого витка спирали $\rho = a\varphi$. Во всех этих случаях Архимед пользовался неравенствами, вытекающими из (2), находя, по существу, нижнюю грань верхних сумм (площадей или объемов описанных фигур) и верхнюю грань нижних сумм (площадей или объемов вписанных фигур).

Так, при определении площади S первого витка спирали $\rho = a \frac{\varphi}{2\pi}$ Архимед делит центральный угол, равный 2π , на n частей и рассматривает

¹ Архимед. Сочинения, стр. 195.

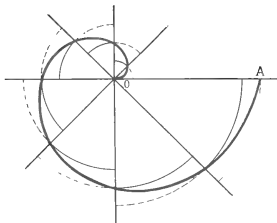


Рис. 23

описанную $\bar{S}$ и вписанную $\underline{S}$ фигуры, составленные из описанных и вписанных круговых секторов соответственно (рис. 23). Тогда

$$\bar{S} = \sum_{v=1}^n \left(\frac{va}{n} \right)^2 \frac{\pi}{n} > \frac{n^3}{3} \cdot \frac{a^2}{n^2} \frac{\pi}{n} = \frac{a^2\pi}{3},$$

$$\underline{S} = \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{va}{n} \right)^2 \frac{\pi}{n} < \frac{n^3}{3} \cdot \frac{a^2}{n^2} \frac{\pi}{n} = \frac{a^2\pi}{3}.$$

Архимед показывает, что разность $\bar{S} - \underline{S}$ может быть сделана как угодно малой, и так как

$$\underline{S} < S < \bar{S},$$

то он заключает, что $S = a^2\pi/3$. Это он доказывает методом от противного.

Во всех трех случаях Архимед вычисляет, по существу,

$$\int_0^a x^2 dx := \frac{a^3}{3}. \quad (5)$$

II. Бурбаки поставил вопрос о том, «до какой степени Архимед осознавал те родственные связи, которые объединяют различные исследуемые им проблемы (связи, которые мы бы выразили, говоря, что один и тот же интеграл появляется во многих случаях в различных геометрических аспектах), и какое значение он им придавал»¹. Мы не можем дать прямого ответа на этот вопрос, однако несомненно, что Архимед видел, что в основе всех трех случаев, о которых мы говорили, лежат одни и те же аналитические формулы и оценки. Но у него не было средств, чтобы ввести общее понятие определенного интеграла, и вряд ли он имел о нем четкое представление. Все же Архимед установил родственные связи между тремя рассмотренными случаями тем, что свел их к определению предела одних и тех же интегральных сумм — прообразу нашего понятия определенного интеграла. Аналогичным образом формула (1) служила Архимеду для на-

¹ Н. Бурбаки. Очерки по истории математики, стр. 169.

хождения предела суммы $\sum_{v=1}^n (vh)h$, которую он применил для определения объема прямого сегмента параболоида вращения.

Вообще результаты книги «О коноидах и сфероидах» равносильны следующим соотношениям:

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2},$$

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3},$$

$$\int_0^a (x^2 + bx) dx = \frac{a^3}{3} + b \frac{a^2}{2},$$

причем в последнем случае, по существу, доказывается, что

$$\int_0^a (x^2 + bx) dx = \int_0^a x^2 dx + b \int_0^a x dx.$$

С помощью метода верхних и нижних интегральных сумм Архимед решил и более трудную проблему — определение длин дуг и площадей кривых поверхностей. Для этого ему понадобились новые постулаты, которые он вводит в начале I книги сочинения «О шаре и цилиндре».

«1. Из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей.

2. Две другие линии, расположенные на плоскости и имеющие те же самые концы, будут всегда неравными, если они обе выпуклы в одну сторону, и одна из них или целиком объемлется другой линией и соединяющей их концы прямой, или же часть ее объемлется другой, часть же является общей обоим линиям; при этом меньшей будет объемлемая линия.

3. Подобным же образом из поверхностей, имеющих общую границу, расположенную на плоскости, наименьшей будет плоскость.

4. Две другие поверхности, имеющие общую границу, расположенную на плоскости, будут всегда неравными, если обе они выпуклы в одну сторону и одна из них или целиком объемлется другой поверхностью и плоскостью, содержащей их общую границу, или же часть ее объемлется другой, часть же является общей обоим поверхностям; при этом меньшей будет объемлемая поверхность.

5. Далее, большая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая, будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находиться в определенном отношении»¹.

Последний постулат представляет знаменитую аксиому Евдокса — Архимеда.

Эти постулаты позволяют Архимеду найти поверхность сферы и сферического сегмента и дать метод вычисления длины окружности с любой сте-

¹ Архимед. Сочинения, стр. 96—97.

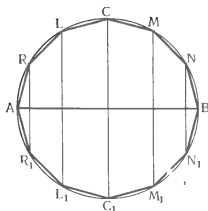


Рис. 24.

пенью точности. Архимед вписывает в круг правильный многоугольник, число сторон которого кратно 4, и вращает круг и многоугольник вокруг диаметра, соединяющего две противоположные вершины (рис. 24). Тогда поверхность тела вращения многоугольника есть сумма поверхностей усеченных конусов. Для подсчета площади этих поверхностей Архимед и находит сумму хорд $RR_1 + LL_1 + CC_1 + MM_1 + NN_1$, т. е.

$$2 \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

Затем он рассматривает поверхность тела вращения $\bar{S}_n$ многоугольника, подобного данному, но описанного около круга. Согласно четвертому постулату

$$\underline{S}_n < S < \bar{S}_n,$$

где S — поверхность шара, причем с ростом n , в силу той же аксиомы, $\underline{S}_n$ монотонно возрастают, а $\bar{S}_n$ монотонно убывают. При этом

$$\underline{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2r\pi \sin \frac{k\pi}{n} r \frac{\pi}{n} = 2r^2\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{n} < 4r^2\pi.$$

Аналогично $\bar{S}_n > 4r^2\pi$. Кроме того, как показывает Архимед, $\bar{S}_n : \underline{S}_n$ с ростом n становится как угодно близким к единице. Из всего этого он выводит, что $S = 4\pi r^2$. Этот результат эквивалентен установлению того, что

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 1.$$

То же соотношение (4) Архимед использует для определения площади поверхности сферического сегмента. Его результат эквивалентен интегралу

$$\int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi = 1 - \cos \alpha.$$

По существу, тот же прием применил Архимед и в работе «Измерение круга». Установив с помощью метода исчерпывания, что площадь круга

равна площади прямоугольного треугольника, один катет которого есть радиус, а другой — длина окружности, Архимед сводит задачу к определению длины окружности, точнее говоря, отношения $C : D$, т. е. числа π . Поскольку в этом случае не удается свести дело к формуле суммирования, Архимед вычисляет периметры p_n и P_n вписанных и описанных многоугольников для $n = 3 \cdot 2^3$, $3 \cdot 2^4$ и $3 \cdot 2^5$. Из неравенств

$$\frac{p_{96}}{D} < \frac{C}{D} < \frac{P_{96}}{D}$$

и получают его знаменитые приближения

$$3 \frac{10}{71} < \frac{C}{D} < 3 \frac{1}{7}.$$

Мы могли бы закончить на этом описание интегральных методов Архимеда, если бы в историко-математической литературе не встречалось часто мнение, что эти методы были лишены эвристической силы и годились лишь для обоснования заранее известных результатов. Между тем, как мы видели, методы Архимеда состоят в построении для искомой величины верхних и нижних интегральных сумм и отыскании их общего предела. Поэтому его методы в принципе столь же пригодны для получения новых результатов, как и метод интегральных сумм вообще. И там и здесь необходимым звеном является неалгоритмическая операция предельного перехода (или отыскания верхней и нижней граней), реализация которого зависит от вспомогательных вычислительных средств. В случае, если предел не может быть выражен с помощью известных функций, суммы Римана позволяют вычислить его с любой степенью точности, чем, кстати, и воспользовался Архимед в «Измерении круга».

Как же могла возникнуть подобная точка зрения на методы Архимеда? Поводом для нее послужила найденная в 1906 г. рукопись Архимеда, в которой среди ранее известных сочинений находилось новое, упоминавшееся нами «Послание к Эрастосфену о механических теоремах». В нем Архимед находит и доказывает математические теоремы с помощью принципа рычага, причем пишет: «Кое-что из того, что ранее мною усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически»¹. Это «кое-что» включает большое число результатов Архимеда: площадь параболического сегмента, объемы шара, эллипсоида, сегментов шара и параболоида, вращения, центры тяжести этих фигур и тел. Однако, во-первых, здесь содержатся не все результаты Архимеда; во-вторых, и это главное, механический метод ни разу не применяется к проблемам определения поверхностей и длин дуг. Он не был и не мог быть применен также и к определению площади спирали.

В чем же состоит этот метод? Мы разберем это на примере задачи определения объема шара.

Пусть даны шар с радиусом $R = AC$ (рис. 25), конус и цилиндр, основания которых имеют радиус $2R$, а высоты равны $2R$. Пусть MN — след произвольной горизонтальной плоскости. Эта плоскость пересекает цилиндр, шар и конус по кругам с радиусами OM , OK и OL . Из чертежа видно, что

$$AK^2 = OK^2 + OA^2 = OK^2 + OL^2,$$

¹ Архимед. Сочинения, стр. 299.

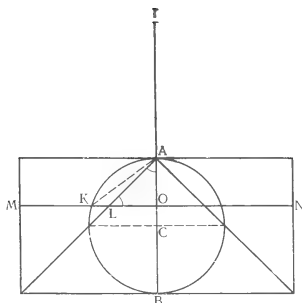


Рис. 25

с другой стороны,

$$AK^2 = AB \cdot OA, \text{ т. е. } AB \cdot OA = OK^2 + OL^2.$$

Умножим обе части последнего равенства на AB :

$$AB^2 \cdot OA = OK^2 \cdot AB + OL^2 \cdot AB,$$

или

$$(\pi \cdot AB)^2 \cdot OA = (\pi \cdot OK^2) \cdot AB + (\pi \cdot OL^2) \cdot AB. \quad (6)$$

Представим теперь, что отрезки AB и $AT = AB$ являются плечами рычага, точка опоры которого совпадает с точкой A . Тогда соотношение (6) показывает, что если перенести круговые сечения шара $\pi \cdot OK^2$ и конуса $\pi \cdot OL^2$ в точку T , то они «уравновесят» по отношению к точке A круговое сечение цилиндра $\pi \cdot AB^2 = \pi \cdot OM^2$, оставленное на своем месте. Архимед замечает, что подобное соотношение устанавливается и для любых других сечений шара, конуса и цилиндра, лежащих в одной и той же горизонтальной плоскости. «Если теперь, беря такие круги, заполнить ими как цилиндр, так и шар с конусом, то цилиндр, оставаясь в том же положении, будет относительно точки A находиться в равновесии со вместе взятыми шаром и конусом, если перенести их на рычаг в θ и поместить так, чтобы центр тяжести каждого из них оказался в θ »¹. Но центр тяжести оставшегося на месте цилиндра находится в точке C — середине отрезка AB . Поэтому, если $V_{\text{ц}}$, $V_{\text{ш}}$ и $V_{\text{к}}$ соответственно объемы цилиндра, шара и конуса, мы получаем, что

$$V_{\text{ц}} \cdot AC = (V_{\text{ш}} + V_{\text{к}}) \cdot AT = (V_{\text{ш}} + V_{\text{к}}) \cdot 2AC,$$

и, следовательно,

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{2} V_{\text{ц}} - V_{\text{к}};$$

¹ Архимед. Сочинения, стр. 303. В переводе И. Н. Веселовского буква T обозначена через θ .

по

$$V_K = \frac{4}{3} V_{\Pi},$$

и потому

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{2} V_{\Pi} - \frac{1}{3} V_{\Pi} = \frac{1}{6} V_{\Pi} = \frac{1}{6} \pi (2R)^2 \cdot 2R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Здесь объем шара находится вовсе не путем арифметического суммирования объемов элементарных слоев. Никакого вычисления интегральных сумм не проводится. Отсутствует и отыскание их предела. Таким образом, механический метод нельзя рассматривать как начало интегральных методов. Это не интегрирование, а скорее обход интегрирования. При этом принцип рычага позволяет Архимеду свести определение неизвестных площадей и объемов к известным путем установления некоторых соотношений между элементарными частями известных и неизвестных объемов, т. е. свести вычисление одного интеграла к другому.

Механический метод Архимеда не является единственным примером открытия математических истин с помощью предложений механики и физики. Так, более двух тысячелетий спустя Д. Бернулли (середина XVIII в.) нашел из физических соображений общее решение дифференциального уравнения колебания струны в форме тригонометрического ряда. В середине XIX в. Б. Риман применил положения из теории электричества для установления того, что на каждой замкнутой римановой поверхности существует алгебраическая функция, отличная от постоянной. При окончательном изложении математики стремились исключить все эти физические посылки и вывести искомое предложение, не опираясь на них. Такого рода примеры можно было бы умножить.

Дифференциальные методы Архимеда

В сочинении «О спиралях» Архимед разработал методы определения касательной. Эти методы были применены только в одном случае — для отыскания касательной к спирали $\rho = a\varphi$. Тем не менее они обладают той же степенью общности, что и его интегральные методы, и могут служить для отыскания касательной к любой дифференцируемой кривой.

Спираль, которую мы задаем уравнением $\rho = a\varphi$, Архимед описывает кинематически: прямая OA равномерно вращается вокруг точки O (пусть, для определенности, — против часовой стрелки) и одновременно по ней равномерно движется точка M в направлении от O к A . Эта точка M и описывает спираль.

Архимед показывает, что радиус-векторы спирали относятся, как соответствующие дуги окружности $\rho_1 : \rho_2 = \varphi_1 : \varphi_2$, т. е. $\rho = a\varphi$. Все остальные рассуждения Архимед проводит, пользуясь, по существу, полярными координатами.

Пусть теперь требуется найти касательную в точке P спирали. Для этого Архимед определяет ее «полярную подкасательную» OT , перпендикулярную к OP (рис. 26). Как видно из доказательства, Архимед проводит близкий радиус-вектор OQ и сравнивает треугольник OPT и бесконечно малый треугольник PRF , образованный отрезком радиус-вектора RF , отрезком касательной FP и дугой окружности PR . Эти треугольники прямоугольные ($\angle PRF$ — прямой), а $\angle FPR$ отличается от $\angle PTO = \alpha$ на бес-

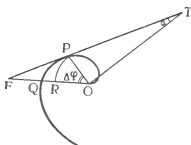


Рис. 26

конечно малую (если $\angle POR = \Delta\varphi$, то $\angle PFR = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \Delta\varphi)$, а $\angle FPR = \alpha + \Delta\varphi$). Предполагая, что оба эти треугольника подобны, можно написать

$$\frac{FR}{RP} \approx \frac{QR}{RP} \approx \frac{OP}{OT}, \quad (1)$$

или, в современной символике,

$$\frac{\Delta r}{r \Delta\varphi} \approx \frac{\Delta\rho}{\rho \Delta\varphi} \approx \frac{OP}{OT} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1')$$

где r — радиус-вектор касательной. Из этих «равенств» получаем

$$OT \approx OP \frac{\rho \Delta\varphi}{\Delta\rho} = \rho^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta\rho},$$

что соответствует нашей формуле $OT = \rho^2 \frac{d\varphi}{d\rho}$. Так как для спирали $\rho = a\varphi$, то $\Delta\rho = a\Delta\varphi$ и

$$OT = \rho^2 \frac{\Delta\varphi}{a\Delta\varphi} = \rho\varphi.$$

При $\varphi = 2\pi$ $OT = 2\pi\rho$, и, следовательно, подкасательная к спирали может служить для спрямления круга, что и отмечает Архимед.

Чтобы обосновать законность «равенств» (1), Архимед исследует в специальных леммах¹ отношение $\frac{\Delta r}{r \Delta\varphi}$ и доказывает, что при достаточно малом $\Delta\varphi$ разность $\left| \frac{\Delta r}{r \Delta\varphi} - \operatorname{tg} \alpha \right|$ может быть сделана как угодно малой, или

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{r \Delta\varphi} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Эти исследования носят общий характер и совершенно не зависят от свойств спирали. Оценку разности

$$\left| \frac{\Delta r}{r \Delta\varphi} - \frac{\Delta\rho}{\rho \Delta\varphi} \right| \quad \text{или} \quad \left| \frac{\Delta\rho}{\rho \Delta\varphi} - \operatorname{tg} \alpha \right|$$

¹ Предложения VI—IX книги «О спиралях».

Архимед делает только для спирали. Он молчаливо находит

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{a\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\varphi}$$

и показывает методом от противного, что $\operatorname{tg} \alpha = 1/\varphi$. Последнее доказательство играет ту же роль, что и заключительное рассуждение в методе истощения: оно обеспечивает единственность предела. Это рассуждение должно было повторяться для всякой конкретной кривой заново, так как не было еще выделено ни общих понятий, ни условий, которые позволили бы провести рассуждение раз и навсегда.

К дифференциальным методам Архимеда относится и его метод определения экстремумов. Задачи на определение экстремумов возникли в алгебре древних прежде всего при определении условий разрешимости уравнений. Первая из них встречается в «Началах» Евклида и относится к квадратному уравнению вида

$$x(a-x) = S.$$

Элементарным путем нетрудно установить, что

$$\max_{0 \leq x \leq a} x(a-x) = \frac{a^2}{4},$$

и, значит, уравнение имеет действительные положительные решения при $S \leq (a/2)^2$.

Вторую, более трудную задачу рассмотрел Архимед. Как уже говорилось, он провел полное исследование условий существования положительных корней кубического уравнения

$$x^2(a-x) = Sc = pbc. \quad (2)$$

Это уравнение может иметь положительные корни, если

$$Sc \leq \max_{0 \leq x \leq a} x^2(a-x),$$

так что дело сводится к определению максимума $x^2(a-x)$. Мы говорили также, что корень или корни уравнения (2) строились, как абсциссы точек пересечения кривых

$$y = \frac{x^2}{p} \quad (3)$$

и

$$y = \frac{cb}{a-x}. \quad (4)$$

Кривые (3) и (4) на отрезке $0 \leq x \leq a$ могут иметь либо две точки пересечения (рис. 27), либо одну общую точку, которая тогда является их общей точкой касания (рис. 28), либо не иметь ни одной общей точки. Вывод условий, при которых имеет место каждый из этих случаев, непосредственно связан с отысканием экстремума выражения $x^2(a-x)$.

Архимед утверждает, что этот экстремум достигается при $x = 2a/3$. В тексте нет указаний на то, как это значение было найдено. Однако Архимед доказывает, что при $x = 2a/3$ выражение $x^2(a-x)$ имеет максимум, равный $4a^3/27$. Из этого доказательства и удастся извлечь его метод. Действительно, Архимед доказывает, что если при $x = x_1$ кривые (3) и

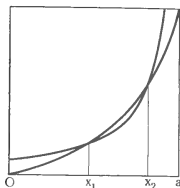


Рис. 27

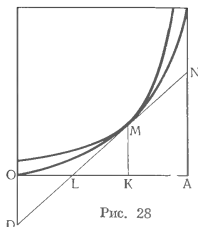


Рис. 28

(4) пересекаются, но не касаются, то в этой точке выражение $x^2(a-x)$ не может иметь экстремума. Значит, необходимым условием является наличие у кривых (3) и (4) точки касания. Тогда (см. рис. 28), поскольку обе кривые имеют одну и ту же касательную, $MN = ML$ (по свойству касательной к гиперболе), и $MK = OD$ (по свойству касательной к параболе), но при этом $LK = KA$ и $OL = LK$, т. е. $OK = \frac{2}{3} OA = \frac{2}{3} a$. При этом $\max x^2(a-x) = 4a^3/27$.

Метод Архимеда обладает большой степенью общности и может быть применен к любому выражению вида $f(x)g(x)$. Действительно, пусть требуется отыскать экстремум произведения

$$u(x) = f(x)g(x).$$

Для нахождения необходимого условия предположим, что экстремум M достигается в точке с абсциссой x_0 :

$$u(x_0) = f(x_0)g(x_0) = M.$$

Согласно Архимеду, нужно рассмотреть кривые $y_1 = f(x)$ и $y_2 = M/g(x)$. Легко установить, что если при $x = x_1$ кривые пересекаются, то x_1 не может быть точкой экстремума. Значит, в точке экстремума обе кривые должны иметь точку касания, иными словами

$$y_1'(x_0) = y_2'(x_0),$$

или

$$f'(x_0) = -\frac{M}{g^2(x_0)} g'(x_0),$$

$$f'(x_0)g^2(x_0) + Mg'(x_0) = 0.$$

Но $M = f(x_0)g(x_0)$, поэтому получаем $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = 0$, т. е. условия Архимеда при переводе на язык дифференциального исчисления равносильны нашему: необходимым условием экстремума является равенство нулю производной

$$u'(x) = [f(x)g(x)]' = 0.$$

Таким образом, Архимед нашел общий метод сведения проблем определения экстремумов к проблемам нахождения касательных.

Мы не знаем, получил ли метод Архимеда применение в древности. Однако известно, что он не умер вместе с ним. Его воскресили и с успехом применили математики XVII в. М. Риччи и Э. Торричелли, причем последний распространил метод на отыскание экстремумов функций вида $u = x^m(a-x)^n$, где $0 \leq x \leq a$.

Другие математические работы Архимеда

Из других работ Архимеда, относящихся к математике, отметим его «Исчисление песчинок» («Псаммит»), где разработан способ, позволяющий регулярно выражать сколь угодно большие числа посредством специальной системы наименований десятичных разрядов. Числа до мириады (десять тысяч) мириад, т. е. до $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$, именуются первыми; 10^8 принимается за единицу вторых чисел, следующих до $10^{8 \cdot 2-1}$; $10^{8 \cdot 2}$ — за единицу третьих чисел, следующих до $10^{8 \cdot 3-1}$ и т. д. вплоть до мириадо-мириадных чисел от $10^{8 \cdot (10^8-1)}$ до $10^{8 \cdot 10^8}$ (исключая последнее число). Все эти числа составляют первый период. Аналогично начиная с $10^{8 \cdot 10^8}$ строятся первые, вторые и т. д. числа второго порядка, причем конструкция доводится до мириадо-мириадного периода и числа $10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8}$, но может быть продолжена и далее. Опровергая мнение людей, которые полагают, что количество песчинок на земле бесконечно или же что его нельзя сосчитать, Архимед показывает, что число песчинок, которое могло бы заполнить сферу, доходящую до неподвижных звезд, не превосходит тысячи мириад единиц восьмых чисел первого периода, т. е. $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{8 \cdot 7} = 10^{63}$. При этом он полагал, что диаметр такой сферы менее чем в 10 000 раз превосходит диаметр Земли.

Некоторые сочинения Архимеда сохранились только в арабском переводе багдадского ученого IX в. Сабита ибн Корры. К ним относятся «Леммы», «О семиугольнике» и «О касающихся кругах». В «Леммах» среди других задач излагается трисекция угла с помощью вставки, в трактате «О семиугольнике» аналогичным методом решается другая задача, сводимая к кубическому уравнению. В списке сочинений Архимеда, известных арабам, историк Ибн ал-Кифти (XII в.) указывает также сочинение «О параллельных линиях». Возможно, что Архимед был одним из первых ученых, пытавшихся доказать V постулат Евклида.

Архимед и математика Нового времени

Исследования Архимеда относились к таким фундаментальным проблемам, как определение площадей, объемов, поверхностей, центров тяжести, касательных и экстремумов. Для решения этих проблем он создал те основные методы, которые мы употребляем до сих пор: метод верхних и нижних интегральных сумм, характеристический бесконечно малый треугольник для определения касательных и, наконец, метод сведения задач на экстремумы к определению касательных. Дальнейший принципиальный прогресс в этом направлении означал бы создание интегрального и дифференциального исчисления, но для этого не хватало многих условий, а в самой математике — аналитической базы: буквенного исчисления, освоения более широкого класса функций, создания аналитического аппа-

рата для их выражения. Исследования Архимеда не получили развития в древности. Дважды человечество открывало вновь Архимеда, и дважды ученые делали попытки продвинуться дальше по открытому им пути. Первый раз — на арабском Востоке, второй — в Европе XVI — XVII вв. Несмотря на то, что Сабит ибн Корра и ученые его школы, а также Ибн ал-Хайсам овладели методом верхних и нижних интегральных сумм и даже вычислили (выражаясь по-современному) несколько новых интегралов, далеко они не продвинулись. Здесь действовали те же общие и частные приемы, что и в древности.

Только после создания буквенной алгебры Виета — Декарта и аналитической геометрии Декарта — Ферма и вместе с успехами физических наук Нового времени стало возможным создание исчисления бесконечно малых. На это ушли силы многих великих умов XVI—XVII вв., начиная от Кеплера и Галилея и кончая Ньютоном и Лейбницем. И все они в той или иной степени отправлялись от работ Архимеда, стараясь обобщить и усилить методы великого ученого. Значение работ Архимеда для нового исчисления лучше всего выразил Лейбниц: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометров».

Аполлоний

Третий из великих греческих геометров эпохи эллинизма — Аполлоний родился в Пергах в Малой Азии. Расцвет его деятельности падает примерно на 240 г. до н. э. В это время он жил в Александрии, куда приехал еще юношей и где учился под руководством математиков школы Евклида. Аполлоний прославился как геометр и астроном. Умер он около 170 г. до н. э.

Творчество Аполлония богато новыми красивыми идеями. Мы уже говорили, что ему принадлежит мысль ввести эпициклы и эксцентрические окружности для того, чтобы представить видимое движение Солнца и планет.

В математике Аполлоний более всего известен своими «Коническими сечениями», в которых он дал полное изложение теории, причем развил и аналитические и проективные методы. Об этом великом произведении мы будем говорить специально, а сейчас отметим остальные его работы, о которых мы знаем из сообщений Паппа и других позднейших ученых. Аполлоний написал трактат «О вставках», посвященный классификации задач, которые решаются с помощью вставок. Мы уже говорили, что такие задачи могут оказаться разрешимыми циркулем и линейкой (древние называли их плоскими), с помощью конических сечений (телесные задачи) и, наконец, с помощью других кривых (линейные). Выявление того, к какому классу относится та или иная задача, могло означать начало их алгебраической классификации, однако мы не знаем, что именно сделал Аполлоний. Интерес Аполлония к алгебраическим проблемам проявился и в другой его работе — «О неупорядоченных иррациональностях», в которой он, по сообщению Прокла, продолжил классификацию Евклида. Мы можем только гадать, ограничился ли Аполлоний квадратичными иррациональностями или начал классификацию кубических иррациональностей. И то и другое представляло большой интерес.

Из чисто геометрических работ Аполлония отметим «О спиральных линиях», в которой он рассматривает спирали на поверхности цилиндра,

«О касании», где разбирается знаменитая задача Аполлония: даны три вещи, каждая из которых может быть точкой, прямой или окружностью; требуется провести окружность, которая проходила бы через каждую из данных точек и касалась бы каждой из данных прямых или окружностей.

Папп приводит некоторые теоремы из сочинений «О плоских геометрических местах», на основании которых можно заключить, что Аполлоний рассмотрел преобразования плоскости в себя, которые переводят прямые и окружности в прямые и окружности. Частными случаями этих преобразований являются преобразования подобия и инверсии относительно некоторой точки.

Мы не будем приводить названия еще нескольких утраченных трудов Аполлония.

«Конические сечения» Аполлония

«Конические сечения» состоят из восьми книг. Первые четыре, в которых, по словам автора, излагаются элементы теории, дошли до нас по-гречески, следующие три — в арабском переводе Сабита ибн Корры, последняя — восьмая — книга утеряна. Имеется реконструкция ее текста, принадлежащая английскому астроному Э. Галлею (XVIII в.).

Эти книги настолько богаты содержанием, что нет возможности дать о них сколько-нибудь полное представление. Желающих ознакомиться с ними мы можем отослать либо к самому оригиналу, либо к указанной в библиографии книге Г. Цейтена, посвященной учению о конических сечениях в древности.

Мы здесь остановимся лишь на вопросе о новой трактовке конических сечений у Аполлония, близкой к точке зрения современной аналитической геометрии.

Мы уже говорили, что кривые второго порядка были впервые рассмотрены в связи с задачей удвоения куба и что Мeneхм представил их как плоские сечения прямоугольного, тупоугольного и остроугольного конусов вращения. Такое стереометрическое представление гарантировало существование и непрерывность рассматриваемых кривых. Затем Мeneхм переходил к выводу основного метрического свойства сечения, которое древние называли *симптомом*, а мы — уравнением кривой. Вот как это делалось для сечения прямоугольного конуса вращения.

Пусть OAB — сечение этого конуса плоскостью, проходящей через ось OL , и пусть PLK — след плоскости, перпендикулярной к образующей этого конуса (рис. 29). Тогда $KM^2 = AK \cdot KB$, так как AMB — полуокруг. Но $AK = PP' = \sqrt{2LP^2}$, а $KB = \sqrt{2KP^2}$, поэтому

$$KM^2 = 2LP \cdot KP.$$

Обозначим KM через y , KP — через x , а LP — через p , тогда получим

$$y^2 = 2px. \quad (1)$$

Это и есть уравнение, или *симптом*, кривой, которое мы записываем с помощью буквенной символики, а древние записывали в словесно-геометрической форме: квадрат на полухорде KM в каждой точке равен пря-

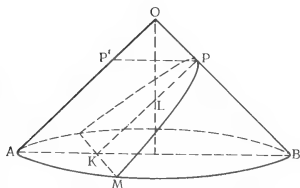


Рис. 29

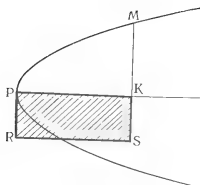


Рис. 30

моугольнику $PKSR$, построенному на отрезке PK оси до вершины (x) и на постоянном отрезке PR (рис. 30).

Аналогично выводились уравнения для сечений остроугольного и тупоугольного конусов, т. е. эллипса (рис. 31) и гиперболы (рис. 32):

$$\frac{y^2}{x(2a-x)} = \frac{p}{a} \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{x(2a+x)} = \frac{p}{a}, \quad (2)$$

где $2a$ — большая ось эллипса или действительная ось гиперболы, а p — постоянная.

В случае, когда $p = a$, уравнения (2) принимают вид

$$y^2 = x(2a-x) \quad \text{и} \quad y^2 = x(2a+x), \quad (3)$$

первое из которых является уравнением окружности радиуса a , а второе — уравнением равнобедренной гиперболы. Эллипс и гипербола (2) могут быть получены из окружности и гиперболы (3) сжатием к оси абсцисс в отношении $\sqrt{p/a}$.

Аполлоний прежде всего дает более общее определение. Во-первых, он берет произвольный круговой конус; во-вторых, рассматривает обе его полости (что дает ему возможность изучить обе ветви гиперболы); наконец, он проводит сечения плоскостью расположенной под любым углом к образующей.

Если перейти на привычный нам язык аналитической геометрии, то можно сказать, что до Аполлония конические сечения рассматривались по отношению к прямоугольной системе координат, причем одна из осей совпадала с главным диаметром, а вторая проходила перпендикулярно к ней через вершину кривой; Аполлоний же относил кривые к любому диаметру и касательной, проведенной в одном из его концов, т. е. к некоторой координатной системе координат.

После стереометрического определения Аполлоний также дает вывод симптомов — уравнений кривых. При этом он классифицирует полученные кривые по виду определяющего их уравнения, т. е. в основу кладется точка зрения, свойственная аналитической геометрии.

Посмотрим, как он выводит в предложении I, 11 соответствующее уравнение для параболы. Пусть BAC — сечение кругового конуса плоскостью, проходящей через ось (рис. 33), и пусть проведена плоскостью GHD так, что DE перпендикулярна BC , а GH параллельна AB (GH мож-

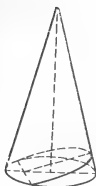


Рис. 31

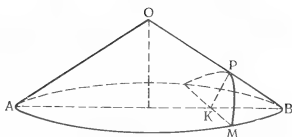


Рис. 32

но было выбрать параллельной AC). Найдем уравнение кривой DGE , полученной в сечении.

Пусть K — произвольная точка этой кривой. Проведем KL параллельно DE и MN параллельно BC . Плоскость, проходящая через KL и MN , будет параллельна плоскости основания и, как это ранее доказал Аполлоний, будет пересекать конус по кругу. Поэтому

$$KL^2 = ML \cdot LN.$$

Но

$$\frac{ML}{GL} = \frac{BC}{AB}, \quad \text{т. е.} \quad ML = GL \cdot \frac{BC}{AB},$$

$$\frac{LN}{GA} = \frac{GN'}{GA} = \frac{BC}{AC}, \quad \text{т. е.} \quad LN = GA \cdot \frac{BC}{AC}.$$

Значит,

$$KL^2 = GA \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot GL.$$

отрезок GL есть переменное расстояние проекции точки L от вершины, члены $GA \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC}$ постоянны. Аполлоний выбирает такой отрезок GF , что

$$\frac{GF}{GA} = \frac{BC^2}{AB \cdot AC}.$$

Тогда $KL^2 = GF \cdot LG$. Это и есть симптом — уравнение сечения.

Если обозначить $KL = y$, $LG = x$, $GF = 2p$, то мы получим уравнение в привычной форме:

$$y^2 = 2px.$$

У Аполлония уравнение записывается также словесно-геометрически: если GH — один из диаметров параболы, а KL — полухорда, сопряженная с этим диаметром, то Аполлоний откладывает $GR = 2p$ перпендикулярно к GH . Тогда утверждается, что в каждой точке квадрат, построенный на LK (рис. 34), должен равняться прямоугольнику $GRSL$, т. е. $GL \cdot GR$.

Наше название этой кривой «парабола» происходит от названия Аполлония *параболы* (приложение), так как задача о построении точки этой

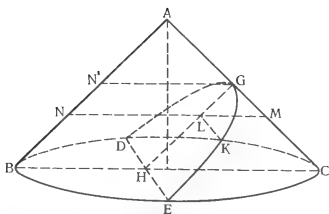


Рис. 33

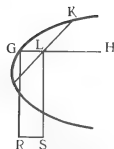


Рис. 34

кривой сводится к задаче о приложении (до Аполлония параболу называли сечением прямоугольного конуса).

Аналогично Аполлоний получает уравнения эллипса и гиперболы.

Так, для эллипса доказывается, что $LK^2 = \text{пл. } GLL'G'$ (рис. 35), где $GH = 2a$ — некоторый диаметр эллипса, LK — полухорда, сопряженная с ним, $GR = 2p$ — постоянная, причем GR перпендикулярна GH . Чтобы перейти к более привычной для нас форме записи, заметим, что

$$LL' = LH \cdot \frac{GR}{GH} = (2a - x) \cdot \frac{p}{a},$$

т. е.

$$LK^2 = y^2 = \frac{p}{a} x (2a - x),$$

или

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2.$$

Таким образом, задача о построении точек эллипса сводится к задаче о приложении с недостатком («эллиптическая задача»), чем и объясняется название «эллипс» (ἐλλειψις — недостаток). Это название было введено Аполлонием, до него эллипс называли сечением остроугольного конуса.

Аналогично для гиперболы (рис. 36) получается уравнение

$$LK^2 = \text{пл. } GLL'G', \text{ т. е. } y^2 = \frac{p}{a} x (2a + x), \text{ или } y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2.$$

Следовательно, задача о построении точек гиперболы сводится к задаче о приложении с избытком («гиперболическая задача»), чем и объясняется название «гипербола» (ὑπερβολή — избыток). Это название также было введено Аполлонием, до него гиперболу называли сечением тупоугольного конуса.

Постоянный отрезок $GR = 2p$, откладываемый перпендикулярно к диаметру GH , Аполлоний назвал «прямой стороной». В настоящее время величину p именуют параметром конического сечения (в случае эллипса и гиперболы с полуосями a и b $p = b^2/a$, и коэффициент сжатия $\sqrt{p/a}$, пре-

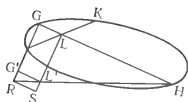


Рис. 35

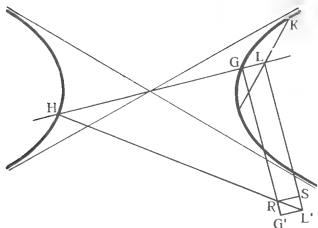


Рис. 36

образующего окружность или равностороннюю гиперболу в данный эллипс или гиперболу, равен b/a .

Итак, классификация конических сечений у Аполлония была, по существу, алгебраической.

Аполлоний прекрасно понимал (и это сближает его с геометрами Нового времени), что такая классификация законна только в том случае, если вид уравнения не изменяется при отнесении кривой к другому ее диаметру и сопряженным с ним хордам,

В I книге он исследует данный вопрос. Для этого необходимо было определить направление хорд, сопряженных с любым диаметром. При стереометрическом определении сопряженные направления получаются автоматически. Однако для решения задачи, поставленной Аполлонием, нужно определение, независимое от стереометрии. Аполлоний и делает это: он доказывает, что прямая, проведенная через точку A конического сечения параллельно направлению хорд, сопряженных с диаметром, проходящим через A , есть касательная (предложения I, 17 и I, 32). После этого он строит касательную к параболе (I, 33), эллипсу, кругу и гиперболу (I, 34).

Пусть P — некоторая точка на параболу и AA' — один из диаметров (рис. 37). Аполлоний доказывает, что касательная PR отсекает от продолжения диаметра отрезок $AR = AQ$, если PL — хорда, сопряженная с AA' . Для гиперболы, эллипса и круга он получает соотношение

$$RA : RA' = QA : QA'$$

(на рис. 38 изображен случай эллипса). Впоследствии такое расположение четверки точек получило название гармонического.

Аполлоний преобразует затем уравнение эллипса и гиперболы так, что начало координат оказывается в центре кривой (предложение I, 41), а уравнение параболы так, что начало координат совмещается с вершиной той кривой (предложение I, 42).

Таким образом, здесь осями координат служат два сопряженных диаметра. После этого он показывает, что вид уравнения не изменится, если

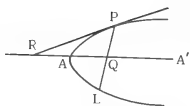


Рис. 37

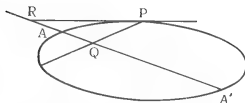


Рис. 38

в качестве новых осей координат взять любой из диаметров кривой и касательную, проведенную в одном из его концов (предложение I, 49—50).

При этом, например, уравнение эллипса $y^2 = \frac{p}{a} x(2a - x)$ перейдет в уравнение $y'^2 = \frac{p'}{a'} (2a' - x')$, где $2a'$ — длина нового диаметра, а p' определяется из условия

$$\frac{p'}{B'D} = \frac{B'I}{B'D'}.$$

Здесь I — точка пересечения касательных в точках B и B' , а D и D' — точки пересечения диаметров AB и $A'B'$ с касательными в точках B' и B (рис. 39).

Итак, в I книге Аполлоний рассматривает множество систем координат, зависящее от одного параметра, так как эти системы координат вполне определяются одной точкой кривой — концом диаметра, и доказывает инвариантность уравнений эллипса, гиперболы и параболы относительно преобразований соответствующих систем координат.

В конце I книги Аполлоний показывает, что можно выбрать диаметр, который будет перпендикулярен к сопряженным с ним хордам. Тогда рассматриваемую кривую можно представить как сечение либо тупоугольного, либо остроугольного, либо прямоугольного конусов вращения плоскостью, перпендикулярной к образующей. Этим устанавливается тождество кривых, введенных Аполлонием, с коническими сечениями, которые рассматривались до него.

Мы видим, что I книга построена по строго продуманному плану. Основная идея ее состоит в том, чтобы за основу классификации кривых принять свойства их алгебраических уравнений, и именно те, которые остаются инвариантными при допустимых преобразованиях координат. Только в XIX в. эта мысль была понята до конца, когда Клейн в «Эрлангенской программе» установил новый взгляд на геометрию, как на науку об инвариантах определенных групп преобразований плоскости или пространства.

В последующих трех книгах Аполлоний развивает теорию конических сечений: выясняет основные свойства сопряженных диаметров и асимптот, получает уравнение гиперболы относительно асимптот ($xy = \text{const}$) и устанавливает основные свойства фокусов эллипса и гиперболы. Здесь же впервые появляются полюсы и поляры относительно конических сечений: если из точки можно провести две касательные к коническому сечению, то прямая, соединяющая точки касания, называется полярной данной точки, а точка — полюсом этой прямой; если передвигать полюс по прямой, пересекающей сечение, то поляра будет вращаться вокруг по-

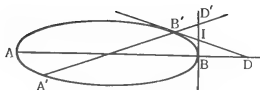


Рис. 39

люса этой прямой, если же передвигать полюс по прямой, не пересекающей сечение, то поляра также будет вращаться вокруг некоторой точки, причем в этом случае точку, вокруг которой вращается поляра, и прямую, по которой движется полюс, также называют полюсом и полярой. Наконец, в IV книге Аполлоний рассматривает вопрос о числе точек пересечения двух конических сечений и показывает, что это число не может быть больше четырех и что если одна из общих точек есть точка касания, то кривые могут иметь, помимо нее, не более двух общих точек. Здесь Аполлоний рассмотрел обе ветви гиперболы, как единую кривую, без чего эти теоремы были бы неверны.

Упомянем еще некоторые теоремы III книги, которая даже среди других книг «Конических сечений» выделяется глубиной идей. Так называемые теоремы о площадях (III, 1—15) служат для отнесения конического сечения к двум произвольным диаметрам, не обязательно сопряженным. Таким образом, здесь Аполлоний рассматривает множество систем координат, зависящее не от одного, а от двух параметров.

В этом случае системы координат вполне определяются двумя точками кривой — концами диаметров. Такая система координат представляет собой произвольную систему косоугольных координат с началом в центре кривой.

В V книге Аполлоний определяет все нормали к коническому сечению (перпендикуляры к касательной, восстановленные в точке касания), которые можно провести из заданной точки, тщательно анализирует, сколько решений имеет задача, исследует экстремальные свойства этих нормалей. В VI книге изучаются подобные конические сечения.

В VII книге содержатся знаменитые теоремы Аполлония: а) сумма квадратов на сопряженных диаметрах эллипса равна сумме квадратов на главных осях (предложение VII, 12); б) разность квадратов на двух сопряженных диаметрах гиперболы равна разности квадратов на главных осях (предложение VII, 13); в) параллелограмм, построенный на двух сопряженных диаметрах эллипса или гиперболы, имеет постоянную площадь (предложение VII, 31). В этих теоремах Аполлоний находит инварианты относительно преобразований систем координат, рассматриваемых им в I книге.

У древних был и аналог нашего понятия «кривая второго порядка». Это было геометрическое место к трем и четырем прямым. Пусть даны три или четыре прямые, и пусть x , y , z , u — расстояния точки M от них (по отрезкам, проводимым под определенными углами). Требуется найти такое геометрическое место, что

$$xz = ku,$$

или для трех прямых:

$$xz = ky^2.$$

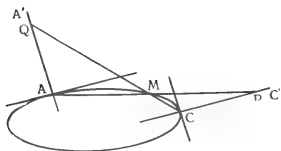


Рис. 40

По словам Аполлония, эту задачу исследовал уже Евклид, но предложенное им решение было неполно, «так как невозможно было довести до конца, построение без моих дополнительных открытий»¹. Г. Цейтен выяснил, что, опираясь на теоремы III книги Аполлония, действительно можно полностью решить эту проблему, т. е. показать, что искомым местом будут конические сечения, причем любое коническое сечение может быть получено как геометрическое место к трем (или четырем) прямым.

В XVII в. исследование геометрического места к трем и четырем прямым явилось у Декарта первым примером применения в геометрии новой алгебры.

В своих книгах Аполлоний развивает не только методы аналитической, но и проективной геометрии, изучающей те свойства фигур, которые не изменяются при центральном проектировании. Очевидно, что при таком проектировании прямые переходят в прямые, хотя, в отличие от параллельного проектирования, параллельность прямых уже не сохраняется. Можно показать, что если после ряда проектирований прямая преобразовалась в себя, то точки M этой прямой с абсциссами x при этом перейдут в точки M' с абсциссами

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0). \quad (4)$$

Поэтому преобразование (4) прямой в себя называется проективным преобразованием прямой, а отображение одной прямой на другую, при котором точка M одной прямой с абсциссой x (при произвольном начале) переходит в точку M' другой прямой с абсциссой (4) (также с произвольным началом), называется проективным отображением. Проективное отображение прямых позволяет определить проективное отображение двух пучков прямых, при котором прямая OM пучка с центром O переходит в прямую $O'M'$ пучка с центром O' . Предложения III, 53—56 «Конических сечений» устанавливают: если центры двух пучков лежат в некоторых точках A и C конического сечения (рис. 40), то точки M сечения характеризуются тем, что прямые AM и CM отсекают от прямых AA' и CC' , проведенных через точки A и C параллельно касательным к сечению соответ-

¹ *Apollonius de Perge. Les coniques*, trad. P. Ver Eecke. Bruges, 1923, p. 2—3 (письмо Аполлония к Евдему).

ственно в C и M , такие отрезки AQ и CP , что прямоугольник, построенный на этих отрезках, имеет постоянную площадь:

$$AQ \cdot CP = \text{const.}$$

Это соотношение показывает, что преобразование, переводящее прямую AA' в прямую CC' , имеет вид $x' = k/x$, т. е. является частным случаем преобразования проективного отображения (4). Поэтому отображение пучков с центрами A и C , при которых соответственные прямые пучков пересекают прямые AA' и CC' в соответственных точках, также проективные, и мы получили частный случай известной теоремы проективной геометрии о том, что геометрическое место точек двух пучков прямых, связанных проективным отображением, вместе с центрами этих пучков является коническим сечением (в общем виде эта теорема была доказана Я. Штейнером в XIX в.).

Теория полюсов и поляр также носит, по существу, проективный характер.

В древности методы исследования кривых, созданные Аполлонием, не получили развития, хотя вплоть до начала V в. н. э. его труды изучались и комментировались. Что касается самих конических сечений, то они были применены еще Архимедом для решения и исследования кубического уравнения. Для тех же целей применяли конические сечения позднейшие античные геометры и ученые стран ислама.

В математическом естествознании конические сечения долгое время не получали никакого применения, если не считать изучения отражения света от параболических зеркал. Только в XVII в. наступило возрождение идей Аполлония: Ферма и Декарт перевели его методы на язык новой алгебры, основав аналитическую геометрию, а Ньютон, применил эти методы для описания и исследования кривых третьего порядка. Но еще раньше теория конических сечений получила самое широкое применение в механике земных и небесных тел: Кеплер установил, что планеты нашей солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце; Галилей показал, что брошенный камень (или снаряд) летит в пустоте по параболе. Наконец, в 80-х годах XVII в. Ньютон создал свои «Математические начала натуральной философии», непосредственно опираясь на труды Аполлония.

Конические сечения Аполлония являются, таким образом, примером математической теории, созданной задолго до того, как она оказалась необходимой в математическом естествознании. Она была создана «впрок» и долгое время представлялась весьма отвлеченной ветвью математики, далекой от каких бы то ни было приложений. По этому поводу А. Эйнштейн писал: «К восхищению перед этим замечательным человеком (речь идет о Кеплере. — И. Б.) добавляется еще одно чувство восхищения и благоговения, но относящееся не к человеку, а к загадочной гармонии природы, которые соответствуют простейшим законам. Наряду с прямой и окружностью среди них были эллипс и гипербола. Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел, во всяком случае с хорошим приближением»¹.

Математика и теперь готовит идеи и методы «впрок». Так, аппарат для теории относительности Эйнштейна (1905—1916) был создан Гауссом (1827)

¹ А. Эйнштейн. Физика и реальность, стр. 108—109.

и Риманом (1854), теория групп, получившая столь широкое применение в квантовой механике, возникла задолго до появления идей этой науки. Эти примеры можно было бы и умножить. Но наиболее ярким и поразительным из них является теория конических сечений Аполлония.

Эпигоны

Творчество Евклида, Архимеда и Аполлония было вершиной античной математики. После Аполлония начался спад. Отдельные исследования ближайших двух веков не выходили из круга проблем, которые были намечены тремя великими геометрами. Обычно говорят, что эти исследования имели эпигонский характер. И действительно, мы не встречаем там ни новых глубоких идей, ни тем более основания новых теорий. Это, скорее, доделки и поправки старого.

Остановимся вкратце на некоторых результатах этого времени.

Во второй половине II в. н. э. относится творчество Диокла. Мы уже упоминали, что Диокл предложил свое решение задачи Архимеда о делении шара в заданном отношении. Это решение в противоположность архимедову, которое было в то время утеряно, не содержало ни обобщения, ни анализа задачи.

Другое исследование Диокла примыкает к работе старшего современника Аполлония — Никомеда, который ввел и изучил новую алгебраическую кривую — конхоиду. Согласно Паппу, конхоида определялась так. Пусть дана точка O , прямая AB и отрезок b (рис. 41). Конхоида есть геометрическое место точек M , лежащих на лучах, исходящих из O и таких, что $MN = a$, где N — точка пересечения луча с прямой AB .

В полярных координатах уравнение этой кривой имеет вид

$$\rho = a + \frac{b}{\cos \varphi},$$

где b — расстояние точки O от прямой AB . В декартовых координатах — это кривая четвертого порядка. Никомед показал, что прямая AB является асимптотой конхоиды. Он применил эту кривую к трисекции угла и удвоению куба.

Диокл ввел и изучил другую алгебраическую кривую — циссоиду, с помощью которой можно определить две средние пропорциональные между двумя заданными величинами. Это кривая третьего порядка.

Между III в. до н. э. и началом нашей эры жил Зенодор, автор трактата «Об изопериметрических фигурах», дошедшего до нас в изложении Теона Александрийского и Паппа. Еще Архимед в последнем предложении II книги «О шаре и цилиндре» показал, что из всех шаровых сегментов, имеющих одинаковую поверхность, наибольшим является полушар. Зенодор решает аналогичную задачу на плоскости. Он показывает, что из всех фигур с одинаковыми периметрами наибольшая — круг. При этом в качестве «фигур» рассматриваются только многоугольники и круги.

Зенодор утверждает также, что из всех тел с одинаковой поверхностью наибольший объем имеет шар. Однако он показывает только, что: 1) тело вращения правильного многоугольника с четным числом сторон вокруг наибольшей из диагоналей будет меньше по объему, чем шар той же поверхности; 2) каждый из правильных многогранников меньше по объему шара, равной с ним поверхности.

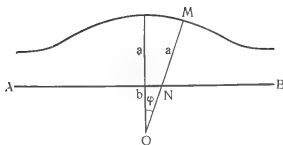


Рис. 41

Упомянем еще Гипсикла (II в. до н.э.) — автора XIV книги «Начал». Известно также, что он писал о многоугольных числах и гармонии сфер.

Римские завоевания

В I в. до н.э. и такие исследования прекращаются. Причины этого трудно понять. Уже с конца III в. до н. э. начинаются тяжелые разрушительные войны: создается будущая Римская империя.

В 212 г. до н. э. под натиском Рима пали Сиракузы. В 146 г. до н. э. римляне завоевали всю материковую Грецию: страна была превращена в пустыню, от Коринфа и других цветущих городов ее остались одни развалины. В это же время был разрушен Карфаген. В 133 г. до н. э. к Риму было присоединено Пергамское царство, и господство римлян распространилось на Малую Азию. Эллинистические государства одно за другим теряют политическую независимость и становятся провинциями Рима.

В конце II в. до н. э. начинаются гражданские войны в Риме, ареной которых становятся эллинистические страны. Это было новое тяжелое кровопускание. Вновь нужно было платить непосильные налоги (иногда их собирали за несколько лет вперед), содержать солдат, доставлять провиант, морские суда и людей для армии. Непокорные города сметались с лица земли. Необычайная жестокость римских вождей, не щадивших ни женщин, ни детей, подавляла эллинов. Но на их глазах гибли не только сограждане — уничтожались культурные ценности, которые накопились веками и перед которыми привыкли преклоняться эллины.

В 86 г. до н. э. войска Суллы после осады, длившейся несколько месяцев, взяли Афины. Город на три дня был отдан на разграбление солдатам. Сулла хотел полностью разрушить его, и только когда к нему пришла делегация афинян, напоминавшая ему о былом величии Афин, он передумал, сказав: «Дарую жизнь живым ради мертвых».

В 31 г. до н. э. войска Цезаря взяли Александрию. При этом впервые сгорела часть ее знаменитой библиотеки, которая потом горела несколько раз.

Экономическая и культурная жизнь в эллинистических странах замирает. Рынки опустели. Пластические искусства и художественные ремесла пришли в упадок. Творческая мысль эллинов больше не оказывала благотворного влияния на народы Востока. Наоборот, в это время возрождаются мистические культы Востока, люди стремятся уйти от реальной жизни, в которой они видели только горе и страдание, их начинают привлекать различные религиозные учения с их обещанием другой, лучшей жизни.

Не удивительно, что в это время абстрактные вопросы математики мало волновали умы людей. Только в начале нашей эры, когда в Риме была установлена империя и экономическое положение стало более устойчивым, греческая наука вновь начинает оживать.

В первые века нашей эры Александрия остается научным и культурным центром древнего мира. Рим не мог сравниться с ней в этом отношении. По существу, он так и не приобщился к глубинам эллинской мысли.

Уже в I в. н. э. в Александрии можно назвать двух выдающихся математиков — Герона и Менелая.

Герон Александрийский

Талантливый инженер и изобретатель, Герон Александрийский одним из первых воспользовался движущей силой пара, сконструировал различные пневматические машины и автоматы. Он оставил нам также описание некоторых измерительных инструментов, как-то: водяных часов и диоптры. Наряду с этим Герон занимался и математикой. Известно, что он преподавал в Мусейоне и оставил комментарии к «Началам» Евклида. Однако интересы его в математике лежали в другой плоскости, — это видно из его «Метрики», в которой он собрал различные формулы, служащие для измерения фигур. Здесь содержится и «формула Герона» для определения площади треугольника по трем его сторонам, которая, согласно арабским источникам, впервые была получена Архимедом. «Метрика» написана кратко и ясно. Если в ней приводятся доказательства, то они точны.

Но Герона интересуют не только логически непогрешимые построения и точные формулы. Он приводит в своей книге и приближенные правила. Так, для извлечения квадратного корня Герон применяет правило, известное еще в древнем Вавилоне:

$$\sqrt{N} \approx \frac{1}{2} \left(a + \frac{N}{a} \right),$$

где a — наибольший целый квадрат, меньший N .

Позднее Теон Смирнский в первой половине II в. н. э. описал очень интересный алгоритм для получения сколь угодно точных приближений для $\sqrt{N}$. Он состоит в следующем: если y_0/x_0 — первое приближение для $\sqrt{N}$, то последующие приближения получаются по формулам

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}, \\y_n &= y_{n-1} + Nx_{n-1}.\end{aligned}$$

Этот процесс быстро сходится. По-видимому, он был известен еще древним пифагорейцам.

У Герона встречается и извлечение кубического корня. Эти и многие другие правила он излагает догматически, поясняя их числовыми примерами. Отметим, что рациональные числа получают у него полное равноправие с целыми.

Менелай Александрийский

В конце I в. н. э. жил Менелай Александрийский, все творчество которого было неразрывно связано с астрономией (а может быть, и астрологией). Известно, что в 98 г. он проводил астрономические наблюдения в

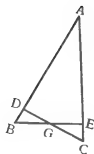


Рис. 42

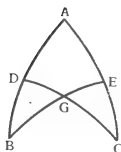


Рис. 43

Риме и составил книгу о вычислении хорд, ныне утерянную. В арабском переводе Сабита ибн Корры до нас дошла «Сферика» Менелая. Видимо, в «Сферике» подводился итог всему предшествующему развитию сферической геометрии, начало изучения которой положил еще Евдокс. «Сферика» состоит из трех книг. В двух первых систематически излагается сферическая геометрия — первая система геометрии, отличная от евклидовой. Стиль изложения тот же, что и в «Началах». Менелай доказывает основные свойства сферических треугольников, исследует случаи их равенства, показывает, что сумма углов сферического треугольника всегда больше $2d$.

Третья книга посвящена сферической тригонометрии. Она начинается со знаменитой теоремы Менелая о трансверсалиях (рис. 42). Пусть AB и AC — прямые на плоскости и на них взяты произвольные точки E и D , и пусть CD и BE пересекаются в G . Тогда, в современных обозначениях

$$\frac{AE}{CE} \cdot \frac{CG}{DG} \cdot \frac{DB}{AB} = 1$$

(сам Менелай формулировал это соотношение с помощью понятия составного отношения: первое отношение составлено из отношений обратных второму и третьему). Это соотношение посредством проектирования из центра Менелай переводит на сферу и получает соответствующее соотношение для хорд (рис. 43), которое в современных обозначениях имеет вид

$$\frac{\text{хорда } 2 \widehat{AE}}{\text{хорда } 2 \widehat{CE}} \cdot \frac{\text{хорда } 2 \widehat{CG}}{\text{хорда } 2 \widehat{DG}} \cdot \frac{\text{хорда } 2 \widehat{DB}}{\text{хорда } 2 \widehat{AB}} = 1.$$

Из полученной теоремы Менелай, а позднее Птолемей получают нужные им формулы сферической тригонометрии.

Клавдий Птолемей

В середине II в. н. э. в Александрии работает знаменитый астроном Клавдий Птолемей (ум. ок. 170). Основной труд Птолемея «Математическое построение» известен под арабизированным названием «Алмагест» (от греческого слова μέγιστη — величайшая — одного из эпитетов этого труда). В книге Птолемея подробно изложена теория видимого движения Солнца, Луны и планет, основанная на эпициклах и эксцентрисических кругах, приведен список более тысячи звезд с указанием их эклиптических

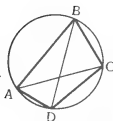


Рис. 44

координат и яркости. В «Алмагесте» греческая наука органически слита с достижениями вавилонских астрономов: Птолемей часто приводит результаты наблюдений вавилонян, которые относились к VIII—VII вв. до н. э. У вавилонян Птолемей заимствует деление круга на 360 градусов и шестидесятиричное деление градуса на минуты, секунды, терции и т. д. Он применял также шестидесятиричные дроби, которые записывал с помощью греческой десятичной буквенной нумерации; он ввел знак для пропущенного разряда в виде буквы ϕ . Роль наших синусов у Птолемея играли хорды (хорда, стягивающая угол, равна удвоенной линии синуса половины данного угла). Птолемей приводит таблицу хорд, вычисленную через 1° .

$\frac{1}{2}$. Приведем начало этой таблицы:

Дуги	Хорды	Дуги	Хорды
$1/2$	0; 34, 25	3	3; 8, 28
1	1; 2, 50	$3 1/2$	3; 39, 52
$1 1/2$	1; 34, 15	4	4; 11, 16
2	2; 5, 40	$4 1/2$	4; 42, 40
$2 1/2$	2; 37, 4	5	5; 14, 4

Астрономическая система Птолемея просуществовала века, и только в XVI в. Коперник заложил основы гелиоцентрической модели солнечной системы.

Для вычисления таблицы хорд Птолемей применил теорему о вписанном четырехугольнике (так называемую теорему Птолемея): если четырехугольник вписан в круг, то произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон, т. е. $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ (рис. 44). Этой теоремой, которая была известна еще Архимеду, Птолемей воспользовался для вывода соотношения, равносильного формуле $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$, которую нетрудно получить из теоремы Птолемея, если принять, что AC проходит через центр, $\angle BAC = \alpha$ и $\angle CAD = \beta$.

Для характеристики математики того времени интересны не только исследования Птолемея, связанные с астрономией, но и его работы по географии. Землю он считал шаром. В своей «Географии» он рассматривает проекцию сферы из полюса на плоскость экватора, т. е. применяет стереографическую проекцию. Птолемей доказывает, что при этой проекции углы между линиями не меняются, фигуры остаются подобными в малом. Эту же проекцию он рассматривает и в «Планисферии», и «Аналемме». Птолемей исследует и другие виды проекций.

Мы видим, что в I—II вв. н. э. наступило оживление математической мысли. Появились крупные исследования, которые не были продолжением

работ классического периода. Это *новые* направления в математике, причем интерес ученых начинают привлекать не только общие теоремы, но и приложения их, особенно создание вычислительного аппарата, в частности плоской и сферической тригонометрии.

Алгебра Диофанта

Новый взлет античной математики достиг кульминации в середине III в. н. э. Это было время, когда жил и работал Диофант — один из величайших математиков древности.

Появление Диофанта составляет до сих пор одну из самых темных загадок истории науки. Труды Диофанта представляют полную неожиданность и по постановке задач, и по методам их решения, и по алгебраической трактовке величин и действий над ними.

О жизни Диофанта нам ничего не известно. Согласно Пселлу, ученый Анатолий Александрийский, который в 270 г. стал епископом Лаодакии, посвятил Диофанту одно из своих исследований. Поэтому полагают, что расцвет творчества Диофанта падает на середину III в. н. э. Кроме того, до нас дошло стихотворение-задача, из которого видно, что Диофант прожил 84 года. Вот его содержание: «Детство Диофанта продолжалось шестую часть его жизни; спустя еще одну двенадцатую у него начала расти борода, он женился спустя еще одну седьмую, и через пять лет у него родился сын; сын прожил половину жизни отца, и отец умер через четыре года после смерти горько оплакиваемого им сына».

Свое основное произведение «Арифметика» Диофант посвятил Дионисию — вероятно, епископу Александрии. Книга должна была служить основой для преподавания. До нас дошло шесть первых книг «Арифметики» из тринадцати.

Уже первая книга «Арифметики» опровергает встречающееся иногда мнение, что числовая алгебра после вавилонян была впервые воскрешена лишь в странах ислама, а затем подхвачена европейцами. На самом деле алгебру вновь начали строить не на базе геометрии, а опираясь на арифметику еще в эллинистическую и римскую эпохи. Числовые квадратные уравнения решал Герон. Высшего расцвета античная алгебра достигла у Диофанта. Вряд ли можно сомневаться, что у него были предшественники, как они имелись у Евклида, Архимеда, Аполлония. Однако мы ничего не знаем ни о людях, ни о трудах, на которые мог опираться этот замечательный алгебраист.

У Диофанта мы находим отнюдь не простой возврат к числовой алгебре вавилонян. Отбросив сковывавшую ее геометрическую оболочку, алгебра наконец-то находит свой собственный, присущий ей язык — появляется буквенная символика. Во введении к «Арифметике» Диофант принимает следующие обозначения: неизвестную он называет «числом» (δ' ἀριθμός) и обозначает символом ς , квадрат неизвестной — символом Δ (первые две буквы слова δύναμις — сила, степень, которым древние греки называли квадрат), куб неизвестной — символом K^{v} (первые две буквы слова κύβος — куб), четвертую степень — $\Delta\bar{\Delta}$ (δυναμιδοδυναμις — квадрато-квадрат), пятую — $\Delta\text{K}^{\text{v}}$ (δυναμιokyβος — квадрато-куб), шестую — $\text{K}^{\text{v}}\text{K}^{\text{v}}$ (κυβοκυβος — кубо-куб).

Образуя дроби с числителем единица и знаменателем — неизвестной и ее степенями. Диофант получает шесть первых отрицательных степеней.

Символом отрицательной степени служит χ , поставленный после записи знаменателя, например: обратная величина квадрата неизвестной обозначалась $\Delta^v\chi$. Свободный член обозначался M^o — первыми двумя буквами слова $\mu\omicron\nu\iota\varsigma$ — единица.

Диофант вводит также символ Λ , как мы полагаем, для обозначения отрицательного числа, и знак равенства, который он обозначает буквой τ (первая буква слова $\tau\iota\varsigma\omicron\varsigma$ — равный). Уравнение

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$$

в записи Диофанта выглядит так:

$$K^v\bar{\alpha}\zeta\zeta\eta\bar{\Lambda}\Delta^v\bar{\epsilon}M^o\bar{\alpha}\iota\zeta\bar{\alpha}.$$

Отсюда видно, что знака для сложения еще нет, — слагаемые члены просто пишутся рядом.

Книга Диофанта свидетельствует о наличии у него буквенной символики. Значение этого шага огромно. Только на такой основе могло быть создано буквенное исчисление, развит формульный аппарат, позволяющий часть наших мыслительных операций заменить механическими преобразованиями. Однако Диофант, видимо, не нашел в этом деле последователь ни в его эпоху, ни много позднее. Лишь с конца XV в. в Европе началась интенсивная разработка алгебраической символики, а завершение создания буквенного исчисления произошло только в конце XVI — начале XVII в. в трудах Виета и Декарта.

Одновременно с введением символики Диофант явно формулирует основные правила алгебраических операций. Так, он подробно излагает правила умножения и деления степеней неизвестного (в наших обозначениях:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, x^m \cdot \frac{1}{x^n} = x^{m-n}, \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x^{m+n}},$$

где $m, n, m+n \leq 6$). После этого он формулирует правило умножения относительных чисел, т. е. расширяет ту числовую область, над которой строится алгебра. Хотя в начале книги Диофант и повторяет, что число есть собрание единиц, но оперирует он и с рациональными числами, и, на наш взгляд, с отрицательными.

Принято считать, что Диофант употреблял только положительные числа, а знак Λ ставил перед положительным числом, вычитаемым из другого, большего положительного числа. При этом указывают, что у Диофанта не встречаются изолированные вычитаемые числа, но только разности алгебраических величин.

Автор этих строк иначе трактует этот вопрос. Вот как Диофант формулирует правило знаков: «Отрицательное, умноженное на отрицательное, дает положительное, тогда как отрицательное, умноженное, на положительное, дает отрицательное и отличительным знаком отрицательного является Λ ». Из приведенных слов следует, что Λ является не символом для операции вычитания числа, а знаком, характеризующим отрицательное число. Это подтверждается и фразой из задачи II, 11: «Прибавим к обеим сторонам отрицательное». Термином для отрицательного у Диофанта служит слово $\lambda\epsilon\iota\phi\iota$, производное от глагола $\lambda\epsilon\iota\phi\omega$, одно из значений которого «недоставать», «не хватать» (или «отсутствовать»). Французский пере-

водчик Диофанта Фер Экке передает этот термин оборотом «то, чего недостает» (ce qui est de manque), а мы могли бы передать словом «недостаток». Отметим, что для операции вычитания Диофант употребляет термин ἀφαίρεσις — отнимаю. «Положительное» у Диофанта — ὑπαρξίς, что означает «существование», а также и «достояние», «имущество». Таким образом, терминология Диофанта для относительных чисел близка к такой терминологии, которую в Средние века употребляли на Востоке и в Европе.

Перейдем к трактовке рациональных чисел. Основная проблема «Арифметики» — это решение неопределенных уравнений в положительных рациональных числах. Неизвестное (напомним, что Диофант называет его числом ἀριθμός) может быть как целым, так и дробным, эти случаи не различаются. Решения ищутся во всей области рациональных чисел, больших нуля.

Диофанту не чуждо и представление об иррациональном числе: так, в задаче IV, 9 он пишет, что «число получается иррациональным». Отметим, что оба правила арабов — ал-джабр и ал-мукабала, т. е. правило переноса вычитаемого члена с одной стороны уравнения в другую с обратным знаком, и правило сокращения равных членов (см. стр. 220), также сформулированы у Диофанта.

Таким образом, Диофант вводит в алгебру символику и обращает существенное внимание на правила алгебраических операций, и все это делается на базе нового, более широкого понятия числа.

Но сколь ни удивительны перемены в построении алгебры, еще более поражает круг проблем, которые ставит и решает Диофант и которые до сих пор носят его имя.

Диофантовы уравнения

Вопрос о решении неопределенных уравнений в рациональных числах занимает важное место в современной математике. Он стоит на стыке теории чисел и алгебраической геометрии, и, несмотря на то, что им занимались такие крупные ученые, как А. Пуанкаре и Д. Гильберт, результатов получено до сих пор немного.

Поясним постановку проблемы. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен с целыми или рациональными коэффициентами. Тогда требуется определить: 1) имеет ли оно рациональные решения или является неразрешимым; 2) если уравнение разрешимо, то нужно найти все его решения, т. е. дать способ эффективного нахождения одного из них, а затем найти общие формулы или описать способ нахождения всех остальных. При этом весьма существенно исследование структуры множества всех решений.

Аналогичные вопросы ставятся и для системы неопределенных уравнений.

Мы видели, что уже пифагорейцы исследовали уравнение $x^2 + y^2 = z^2$. Ничего большего в этом направлении нам неизвестно.

Начиная со второй книги, Диофант исследует неопределенные уравнения второго порядка от двух переменных

$$F_2(x, y) = 0. \quad (1)$$

В декартовых координатах уравнение (1) является уравнением конического

го сечения. Рациональным решениям уравнения (1) отвечают рациональные точки кривой (такие, обе координаты которых рациональны). В дальнейшем мы часто будем пользоваться геометрической терминологией, хотя сам Диофант и не делал этого.

Для кривых вида (1) Диофант устанавливает, по существу, следующую теорему: кривая второго порядка либо содержит бесконечно много рациональных точек, координаты которых могут быть выражены как рациональные функции одного параметра, либо не содержит их вовсе. Это следует из метода, которым Диофант находит рациональные точки кривой, если одна такая точка известна.

Если a, b — рациональная точка кривой (1), т. е.

$$F_2(a, b) = 0, \quad (2)$$

то Диофант делает подстановку

$$y = b + k(x - a),$$

или

$$y = b + kt,$$

$$x = a + t,$$

и получает

$$F_2(a + t, b + kt) = F_2(a, b) + tA(a, b) + ktB(a, b) + t^2C(a, b, k) = 0.$$

Свободный член этого уравнения обращается в нуль в силу (2). Поэтому

$$t = \frac{A(a, b) + kB(a, b)}{C(a, b, k)},$$

т. е. t рационально выражается через параметр k . Каждому рациональному k будет отвечать новая рациональная точка кривой. Геометрически это означает, что через рациональную точку (a, b) проводится прямая

$$y - b = k(x - a)$$

и ищется ее вторая точка пересечения с кривой (1). Если k рационально, то и вторая точка пересечения необходимо будет рациональной. Так, например, в задаче II, 8 требуется представить заданный квадрат в виде суммы двух квадратов:

$$a^2 = x^2 + y^2.$$

Одно из решений здесь

$$x_0 = 0, \quad y_0 = -a,$$

поэтому Диофант делает подстановку $x = t, y = kt - a$. (В силу того, что Диофант имеет символ для обозначения только одной неизвестной, он берет $k = 2, a = 4$ и проделывает все для этих конкретных значений.) Тогда

$$a^2 = t^2 + (kt - a)^2,$$

или

$$x = t = \frac{2ak}{1 + k^2}, \quad y = kt - a = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} a$$

(у Диофанта $x = 16/5, y = 12/5$).

Именно к этой задаче тринадцать веков спустя П. Ферма сделал свое знаменитое примечание, в котором сформулировал так называемую великую теорему Ферма; об этой теореме нам еще придется говорить в дальнейшем (см. т. II, гл. 4).

В IV книге «Арифметики» Диофант переходит к исследованию неопределенных уравнений третьей и четвертой степеней. Здесь дело обстоит гораздо сложнее. Неизвестные, вообще говоря, нельзя выразить в виде рациональных функций одного параметра. Однако, зная одну или две рациональные точки кубической кривой

$$F_3(x, y) = 0, \quad (3)$$

можно найти новую ее рациональную точку.

Для этого можно применить одну из следующих процедур:

1) в рациональной точке P_1 провести касательную. Она в общем случае пересечет кривую (3) еще в одной точке, которая также будет рациональной (эта точка может оказаться бесконечно удаленной);

2) через две рациональные точки P_1 и P_2 провести прямую, которая пересечет кривую (3) еще в одной рациональной точке Q .

Обычно считалось, что первая из названных процедур была впервые применена П. Ферма для решения уравнения

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3,$$

а вторая — О. Коши при исследовании уравнения

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 3Dxyz.$$

Между тем оба эти метода имелись уже в «Арифметике» Диофанта.

Первый из них был применен Диофантом в задаче IV, 24, в которой требуется заданное число a разложить на две такие части x и y , что

$$xy = u^3 - u. \quad (4)$$

Обозначая первое из чисел t , а второе $a - t$, Диофант получает

$$t(a - t) = u^3 - u \quad (5)$$

Одной из рациональных точек будет $P_1(0, 1)$. Диофант полагает

$$u = kt - 1, \quad (6)$$

т. е., по существу, здесь проводится прямая через P_1 . Тогда

$$k^3t^3 + (1 - 3k^2)t^2 + (2k - a)t = 0.$$

Диофант требует, чтобы

$$2k - a = 0, \quad k = a/2.$$

Тогда

$$t = \frac{3k^2 - 1}{k^3} = \frac{3 \frac{a^2}{4} - 1}{\frac{a^3}{8}} = \frac{6a^2 - 8}{a^3}.$$

Требование Диофанта равносильно тому, что (6) есть касательная.

Вторую процедуру Диофант применяет в задачах IV, 26 и IV, 27. В задаче IV, 26 требуется найти два таких числа x и y , что

$$xy + x = u^2,$$

$$xy + y = v^2.$$

Диофант полагает $x = a^2 t$ (он берет для a^2 конкретное значение 8), $y = t^2 - 1$. Тогда первое условие выполнено. Второе условие дает

$$a^2 t^3 + t^2 - a^2 t - 1 = v^2. \quad (7)$$

Диофант полагает

$$v = at - 1$$

и находит

$$t = \frac{a^3 + 3a}{1 + 3a^2}.$$

Остановимся подробнее на примененном здесь методе. Одним из рациональных решений уравнения (7) будет $(0, -1)$. Если мы проведем через эту точку прямую, то получим

$$v + 1 = kt,$$

$$v = kt - 1.$$

Найдем точки пересечения этой прямой с (7):

$$a^2 t^3 + t^2 - a^2 t - 1 = (kt - 1)^2,$$

$$(a^2 - k^2) t^3 + (1 + 3k^2) t^2 - (a^2 + 3k) t = 0. \quad (7')$$

Диофант приравняет нулю коэффициент не при t , а при t^3 и получает

$$a^2 - k^2 = 0, k = a.$$

Что означает такое приравнивание с геометрической точки зрения? Для выяснения этого вопроса запишем уравнение (7) в однородных координатах:

$$a^2 t^3 + t^2 w - a^2 t w^2 - w^3 = v^3. \quad (8)$$

Это уравнение имеет две рациональные точки:

$$P_1(0, -1, 1) \text{ и } P_2(1, a, 0);$$

соединяющая их прямая есть

$$u = at - w.$$

Она-то и даст в пересечении с (8) третью рациональную точку Q . Таким образом, этот метод Диофанта представляет частный случай второй процедуры.

В последующих книгах Диофант применяет как изложенные нами, так и другие интересные методы решения неопределенных уравнений и систем таких уравнений, но мы не сможем здесь на этом остановиться.

В Европе Нового времени с «Арифметикой» познакомились в XVI в., и методы Диофанта, развитые им при решении неопределенных уравнений, оказали огромное влияние на Виета и Ферма.

Прием Диофанта для отыскания рациональных решений неопределенных уравнений третьей степени с двумя неизвестными был, по-видимому,

впервые замечен и применен Виетом и Баше де-Мезириаком. Ферма, как это видно из его примечаний к «Арифметике» Диофанта, уже в совершенстве владел им, причем хорошо понял и геометрический смысл подстановок Диофанта. Быть может, Ферма заметил также, что метод Диофанта дает способ определения углового коэффициента касательной (производной).

Воспроизведем прием Диофанта в «общем виде». Пусть дано неопределенное уравнение третьей степени (3), имеющее рациональное решение (a, b) . Следуя Диофанту, сделаем подстановку:

$$\begin{aligned}x &= a + t, \\y &= b + kt.\end{aligned}$$

Тогда

$$F_3(a + t, b + kt) = F_3(a, b) + tA(a, b) + ktB(a, b) + t^2C(a, b, k) + t^3D(a, b, k) = 0. \quad (9)$$

Но по условию

$$F_3(a, b) = 0.$$

Чтобы t было рациональным, Диофант полагает

$$A(a, b) + kB(a, b) = 0,$$

т. е.

$$k = -\frac{A(a, b)}{B(a, b)}.$$

В современных обозначениях

$$A(a, b) = \frac{\partial F_3}{\partial x}(a, b),$$

$$B(a, b) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(a, b),$$

причем обе частные производные вычисляются чисто алгебраически, в конечное число шагов. Они получаются как коэффициенты при t и kt в разложении (9) многочлена $F_3(x, y)$. Возможно, что Ферма, развивая свой метод алгебраического дифференцирования, отправлялся от такого истолкования метода Диофанта.

Труды Диофанта имели столь же фундаментальное значение для развития алгебры и теории чисел, как и труды Архимеда для развития исчисления бесконечно малых.

Выше говорилось, что мы ничего не знаем о предшественниках Диофанта; точно так же ничего не известно о его преемниках вплоть до IX—X вв. Нет сомнения в том, что то алгебраическое направление, крупнейшим представителем которого он является, имело и других представителей в науке последующих веков; следы влияния этого направления отчетливо видны в арабской математической литературе IX в. После того как ал-Балбаки (ум. 912) перевел «Арифметику» Диофанта на арабский язык, она оказала существенное влияние в странах ислама.

Наименования Диофанта для степеней неизвестного были восприняты на арабском Востоке; об их судьбе в Европе см. стр. 291.

Что касается развития собственно алгебраической геометрии, к которой мы сейчас относим проблемы Диофанта, то влияние идей великого алгебраиста древности можно проследить вплоть до начала XX в. После Ферма прием Диофанта встречается у Эйлера, Якоби и других авторов. Однако наиболее глубокое применение он получил в работах замечательного математика конца XIX — начала XX в. — Алри Пуанкаре, который изучал алгебраическую структуру множества рациональных точек алгебраической кривой.

Закат античной математики

«Арифметика» — последнее, дошедшее до нас великое математическое произведение античности. Это не значит, что после Диофанта математика в Римской империи прекратила свое существование. Математические исследования продолжались, хотя условия для этого были крайне неблагоприятны.

Возникшее в первых веках нашей эры христианство явилось активным врагом языческой культуры и науки. Горят «еретические» книги, гибнут библиотеки, ученые изгоняются или даже уничтожаются физически. Такая враждебность, разумеется, не была случайностью: наука приучала людей к критическому мышлению, к трезвому анализу фактов. Позунгом же религии становятся слова апологета христианства Тертуллиана (II в. н. э.). «Нам после Христа не нужна никакая любознательность, — писал он, — после Евангелия не нужно никакого исследования»...

С другой стороны, и власти мира — римляне не поощряли занятия абстрактной наукой. Занятия заботами о поддержании огромной империи, опиравшейся только узко практические знания.

В такой обстановке александрийская школа все же просуществовала еще более века.

В начале IV в. н. э. там жил и работал замечательный ученый Папп, «Математический сборник» которого показывает, что это был прекрасный знаток классической античной геометрии. Его собственные работы относятся к проективной геометрии и к изучению кривых на торе и других поверхностях. Так, несколько отдельных предложений из «Поризмов» Евклида Папп рассмотрел с единой точки зрения и получил теорему, эквивалентную знаменитой теореме Дезарга. В его трудах можно найти также формулировку и доказательство частного случая теоремы Паскаля (рис. 45): если на прямых AB и CD взяты точки E и G и проведены линии AD , AG , BC , BG , ED и EC , то точки пересечения H , K , L лежат на одной прямой. Эти теоремы, вновь найденные Дезаргом и Паскалем в XVII в., ознаменовали начало проективной геометрии Нового времени.

В конце IV в. н. э. христианская церковь начинает организованное и систематическое наступление на науку. В 391 г. по заранее обдуманному плану была сожжена значительная часть знаменитой Александрийской библиотеки. Оставшиеся рукописи уничтожались еще более трех веков. Когда в VIII в. уровень культуры в арабских странах поднялся настолько, что ученые начали собирать и переводить греческие рукописи, уцелело лишь очень немногое. Это немногое и явилось одним из главных отправных пунктов развития науки в странах ислама, впоследствии и в Европе.

Из ученых конца IV в. можно назвать известного комментатора Теона Александрийского и его дочь Гипатию. Гипатия была автором коммента-

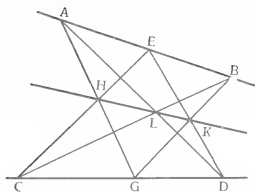


Рис. 45

риев к Аполлонию и Диофанту и славилась своим умом и красноречием. Эта замечательная женщина в 418 г. была растерзана толпой фанатиков-христиан за то, что не хотела порывать с язычеством.

К IV—V вв. относится расцвет школы неоплатоников, к которой принадлежала и Гипатия. Одним из наиболее видных представителей этой школы был Прокл (410—485), который жил и работал уже не в Александрии, а в Афинах. Там он изучал со своими учениками произведения Евклида и Птолемея и производил астрономические наблюдения. Наряду с этим их интересовали мистика и магия. Для нас большой интерес представляют комментарии Прокла в I книге «Начал» Евклида, в которых он дает краткий обзор истории геометрии от Фалеса до Евклида.

В начале VI в. жил и работал Евтокий — выдающийся комментатор сочинений Архимеда и Апполлония. До сих пор труды этих геометров издаются с его комментариями. Следует упомянуть еще Симпликия, автора примечаний к Аристотелю. В частности, поясняя одно из высказываний Аристотеля, он привел отрывки из трактата Гиппократы Хиосского о квадратуемых луночках. Симпликий жил в Афинах в начале VI в. Когда в 529 г. император Юстиниан закрыл Афинскую академию, Симпликий вместе с другими философами переехал в Персию.

Последние выдающиеся греческие ученые — Исидор из Милета и Анфимий из Тралл — жили в VI в. в Византии. Они были строителями знаменитого Софийского собора. В школе Исидора была написана работа, содержащая некоторые предложения о правильных многогранниках, ее обычно присоединяют к «Началам» в качестве XV книги.

Значение греческой математики

Невозможно представить себе, как пошло бы развитие математики в Новое время, если бы ученые средневекового Востока и Европы не имели бы в своем распоряжении сокровищ античной науки. Именно Греции мы обязаны возникновением математики как самостоятельной науки с присущими ей методами нахождения и установления истины, методами конструкции новых объектов и образования новых понятий. Такие достижения греческой математики, как теория делимости чисел, теория иррациональных величин и классификация квадратичных иррациональностей, исследование задач, не разрешимых с помощью циркуля и линейки, парадоксы бесконечного и «метод исчерпывания», интегральные и дифферен-

циальные методы Архимеда, теория конических сечений Аполлония, аксиоматический метод, сферическая геометрия Менелая, тригонометрия хорд Птолемея и алгебра Диофанта, определили дальнейшее развитие математики в течение многих веков. Именно в Греции и эллинистических странах математика пережила свое детство и юность, именно там зародились те великие идеи, полное осуществление которых потребовало полутора-двух тысяч лет упорного труда. Критическое усвоение методов греческой математики легло в основу научной революции XVII в. в математике, но и позднее, в XIX и XX вв., создавая новые направления или строя новые теории, математики неоднократно замечали, что они совершенствуют или воплощают то, что было задумано и начато в древней Греции. С развитием математики мы замечаем в трудах древних все новые и новые идеи и методы, и не надо быть пророком, чтобы предсказать, что процесс этот не кончится вместе с нами.

В Т О Р А Я Ч А С Т Ь

МАТЕМАТИКА В СРЕДНИЕ ВЕКА

ВВЕДЕНИЕ

После крушения античного рабовладельческого общества развитие математических наук в течение нескольких столетий происходило главным образом в странах Ближнего и Среднего Востока — в тех самых странах, которые были колыбелью древнейших цивилизаций и где после завоеваний Александра находились главные культурные и научные центры эллинистического мира. Все эти страны в Средние века входят в состав арабского халифата, и наука в них развивается на арабском языке. Первоначально сосредоточившееся в Двуречье и Египте, это развитие вскоре распространяется по всем странам халифата, охватывая на Востоке Иран и Среднюю Азию, а на западе страны Магриба и мусульманскую Испанию. Страны ислама были не единственными областями развития науки в это время: наука развивалась и в Византии — наследнице восточной части Римской империи, и в сопредельных и тесно связанных с ней в культурном отношении странах Закавказья. Значительных высот наука достигла в это время в Индии и Китае, где она начала развиваться еще в античную эпоху; начиная с X в. на этот путь вступает Западная Европа, а через несколько столетий и Восточная Европа. Уровень развития производства во всех этих странах был примерно одним и тем же, большое сходство имелось и в их социальной структуре.

В таких условиях и характер математики во всех этих странах в главном был один и тот же: средневековая математика это в первую очередь элементарная математика постоянных величин и неизменных геометрических фигур, но такая общая характеристика еще недостаточна. Это прежде всего вычислительная математика, совокупность расчетных алгоритмов для решения арифметических, алгебраических, геометрических задач, вначале простых, затем значительно усложняющихся и стимулирующих теоретическую обработку и создание новых математических понятий; вначале алгоритмов разрозненных, затем объединяемых в научные дисциплины. Развитие математики в Средние века начинается с уровня, значительно более низкого, чем достигнутый в эллинистических странах, но к концу этого периода намного опережает уровень науки времен Птолемея — мы имеем в виду такие области математики, как коммерческая арифметика, алгебра и ее приложения, приближенные вычисления, учение о числе, тригонометрия, геометрические вычисления и построения. Характер этой математики, как мы видим, весьма близок к характеру эллинистической математики первых веков нашей эры: поворот математики к решению практических задач, решения которых требовало развитие производства, транспорта, торговли и таких практических наук, как астрономия, механика и оптика,

начался еще в эллинистическую эпоху, но был прерван крушением античного мира. Разумеется, математика каждой из этих областей обладает своими особенностями. В частности, в математике стран ислама и в более поздней математике Западной Европы чувствуется значительное влияние греческой математики. Такое влияние в гораздо меньшей степени имеет место в математике средневековой Индии и, насколько известно, отсутствует в математике средневекового Китая.

Для каждой из рассматриваемых нами областей развития средневековой математики характерен единый научный язык. Таким языком для Византии и связанных с ней стран был греческий язык (в этом Византия продолжала традиции эллинистических стран), для стран ислама — арабский, для Западной Европы — латынь, для Индии — санскрит, для стран распространения китайской культуры — китайское иероглифическое письмо. На местных языках, например армянском, персидском или итальянском, писались только элементарные учебные пособия, но теоретические труды армяне этой эпохи писали по-гречески, персы и таджики, так же как другие народы Средней Азии, по-арабски, а итальянцы, как и другие народы Западной Европы, — по-латыни.

Математические труды средневековых ученых, как и ученых древности, сохранились только в виде рукописей, многие из которых, написанные на восточных языках, были изучены лишь за последние десятилетия. Поэтому долгое время в Европе было распространено совершенно нецелесообразное мнение о роли и значении трудов математиков средневекового Востока в истории математики. Неправильному представлению способствовали презрительные «европоцентрические» взгляды некоторых историков на достижения народов Востока. Эти ученые считали достойными внимания только математиков греко-эллинистического мира и Европы, математикам стран ислама отводили роль промежуточного звена между эллинизмом и Европой, у индийцев ценили лишь те их достижения, которые через арабов вошли в европейскую математику, а китайскую математику не рассматривали вовсе, считая, что она не оказала влияния на развитие математики в Европе.

Исследования последних десятилетий показали, что все указанные области развития математики были так или иначе связаны друг с другом: связи между математикой Китая и Индии прослеживаются с первых веков нашей эры и особенно усиливаются в период распространения буддизма, когда в Китае появляются индийские ученые. В этот же период индийская наука распространяется на территории стран ислама, и через арабов элементы китайской и индийской математики попадают в средневековую Европу. Начиная с эпохи монгольского нашествия, между странами ислама и Китаем устанавливаются непосредственные связи. В это время китайские ученые появляются в странах ислама, а среднеазиатские и иранские — в Китае. И, наконец, кроме хорошо известного пути научного влияния арабов на Европу через Испанию и Италию, которые находились в тесной связи с западными арабами, следует отметить более поздний, но не менее важный путь влияния науки стран ислама через Византию и греков, переселившихся в Европу после взятия Константинополя турками. Эти греки познакомили европейцев со многими достижениями математиков стран ислама XIII—XV вв. Некоторые из ученых стран ислама испытали на себе влияние математики Китая.

В этой части мы рассмотрим математику средневекового Востока, разделив ее на главы, посвященные в отдельности Китаю, Индии и странам ислама, и математику средневековой Европы, которой посвящены IV и V главы.

ПЕРВАЯ ГЛАВА

КИТАЙ

Древний и средневековый Китай

Китайская цивилизация возникла в начале II тысячелетия до н. э. на берегах реки Хуанхэ, а затем распространилась на бассейн реки Янцзы. Первое китайское государство появилось в эпоху Инь (XVIII—XII вв. до н. э.). К этой же эпохе относятся первые дошедшие до нас китайские письменные памятники — надписи на гадательных костях животных и панцирях черепах. В частности, на гадательных костях XIV в. до н. э., найденных в Хэнане, сохранились обозначения цифр. Обломки посуды, относящиеся в XIII—XII вв. до н. э., снабжены геометрическими орнаментами, например изображениями правильных пяти-, семи-, восьми- и девятиугольников. В это же время началась постройка Великой китайской стены, которая должна оградить царство Инь от кочевников; широко развернулась постройка дорог и каналов. Однако в XII в. до н. э. кочевые племена Чжоу, обойдя недостроенную стену, разрушили царство Инь и основали новое царство. Вскоре, как это происходило в истории Китая многократно, покорители восприняли культуру завоеванного народа. Эта эпоха известна в истории тем, что тогда «расцвели сто цветов, соперничали сто школ ученых». Именно к данному времени относится деятельность знаменитого философа Конфуция (Кунцзы, 551—479 до н. э.), выработавшего основы учения о «добродетельном поведении», а также возникновение математики и астрономии в Китае. Астрономы работали над согласованием общепотребительного лунного календаря с солнечным, появились первые учебники математики, которые не дошли до нас, но, видимо, легли в основу классической «Математики в девяти книгах».

Первые сохранившиеся до нашего времени древнекитайские тексты относятся к концу I тысячелетия до н.э. Это объясняется тем, что в 213 г. до н. э. император Ши Хуан-ди приказал сжечь все книги, по-видимому, для того, чтобы ликвидировать прежние традиции. Однако вскоре при установлении первой династии Хань (II в. до н. э. — I в. н. э.) древние книги стали восстанавливать. Ко II в. до н.э. относится изобретение бумаги, а также создание наиболее древних из дошедших до нас сочинений — математико-астрономического «Трактата об измерительном шесте» и «Математики в девяти книгах».

В царствование второй династии Хань (II в.) Китай установил торговые связи с Римом и Индией. При династии Суй (VI—VII вв.) начинается сооружение Великого канала, соединяющего Южный Китай с Северным. В эпоху династии Тан (VII—X вв.) был покорен ряд соседних стран. Китай становится обширнейшим государством, простирающимся от Тихого океана до Тибета и от Великой стены до Вьетнама. В это время китайская иероглифическая письменность получила распространение у многих народов. Однако разные народы произносили одни и те же иероглифы по-разному.

Например, иероглифы «Восточная столица» японцы произносят «Токио», а китайцы — «Дунцзин» (ср. Бэйцзин, т. е. Пекин, — «Северная столица» и Наньцзин, т. е. Нанкин, — «Южная столица»), одни и те же иероглифы «Страна юга» вьетнамцы произносили «Вьетнам», а китайцы говорили «Юенань».

В эпоху Тан расширяются связи Китая с Индией, Индонезией, Ираном, Средней Азией. Именно в это время, в VIII в., в Китае широко распространяется возникшая в Индии буддистская религия, в вместе с ней и индийская наука. Изобретается книгопечатание с гравированных досок, которые через два столетия были заменены подвижным шрифтом.

В X—XIII вв. в эпоху династии Сун, правившей в Центральном и Южном Китае, особенно высокого развития достигает китайское ремесло и искусство. К этому времени относятся такие важные изобретения, как компас и порох. В XIII в. Китай был завоеван монголами, основавшими новую династию Юань. Столицей становится Ханбалык (Пекин). После монгольского завоевания Китая в дальнейших походах монголов участвуют китайские пороховые мастера, специалисты по стенобитным машинам и оружейники. В значительной степени монголы были обязаны своими победами передовой по тому времени китайской военной технике. В походах монголов в Среднюю Азию и Иран принимали участие китайские мастера. Вскоре там появились и китайские ученые. В свою очередь, купцы и ученые стран ислама проникают в Китай, а затем туда попадают европейцы (к XIII в. относится знаменитое путешествие в Китай Марко Поло).

В древнем Китае преподаванию математики было отведено видное место. Система обучения была разработана еще в эпоху Чжоу. Ко второй половине I тысячелетия н. э. были серьезно поставлены математическое образование и экзамены. В эпоху Тан в Императорской академии математика изучалась семь лет. Для занятия чиновником государственной должности требовалось выдержать некоторые экзамены, в том числе по математике. Были изданы и переиздавались в течение многих веков «Десять классических трактатов», первые два — уже упоминавшиеся «Трактат об измерительном шесте» и «Математика в девяти книгах», а последующие были написаны в III—VI вв.

Важной особенностью китайской науки является ее догматизм. В течение веков китайская наука направлялась чиновниками, придавшими ей, как и многим сторонам жизни страны, бюрократический характер. Если основное математическое произведение греческой науки — «Начала» Евклида — представляет собой единый труд, в котором составные части, написанные разными математиками, подверглись значительной обработке, то китайские «классические трактаты» переиздавались без всяких изменений; среди них «Математика в девяти книгах», которая в свою очередь является собранием нескольких сочинений, написанных разными людьми в различные эпохи.

Китайская нумерация

Китайская нумерация основана на мультипликативном принципе. Форма китайских иероглифических цифр, возникших во II тысячелетии до н. э., установилась к III в. до н. э. Эти иероглифы применяются и в настоящее время и имеют вид, указанный в первом столбце таблицы на стр. 159.

При записи, например, числа, состоящего из тысяч, сотен, десятков и единиц, сверху или слева записывается число тысяч, затем знак тысячи, число сотен, знак сотни, число десятков, знак десятка и, наконец, число единиц. Если какой-нибудь разряд отсутствует, он пропускается. Разряды записываются сверху вниз или слева направо. Первые три иероглифа, очевидно, представляют собой изображение одного, двух и трех пальцев, счетных палочек или зарубок.

Если мы будем обозначать цифры от 1 до 9 нашими обычными цифрами, а 10, 100 и 1000 — римскими цифрами X, C и M, мы можем записать число 1968 этим способом в виде 1M9C6X8. Видоизменениями этих иероглифов являются китайские коммерческие цифры, приведенные во втором столбце той же таблицы.

Арифметические действия в древнем и средневековом Китае производились на счетной доске с помощью счетных палочек. Слово «суань» — «считать» обозначается тем же иероглифом, что и счетная палочка. Счетные палочки делались из бамбука, слоновой кости или металла. Когда были изобретены отрицательные числа, палочки стали делать двух цветов — красные и черные или с различными сечениями — квадратным и треугольным. Палочки раскладывались на счетной доске, которая, как полагают, была разлинована на строки и столбцы. Цифры, составленные из счетных палочек, имели вид, указанный в третьем столбце таблицы на стр. 159, с той разницей, что отсутствие разряда указывалось пустым местом на счетной доске. Оно было хорошо заметно благодаря чередованию вертикального и горизонтального положений палочек. В математической литературе эти цифры изображались на бумаге; в этом случае отсутствие разряда указывалось знаком, приведенным в таблице.

Таким образом, на счетной доске мультипликативный принцип, на котором была основана иероглифическая запись цифр, оказался ненужным, и запись стала позиционной. Однако, в отличие от вавилонян, применявших позиционную нумерацию и в письме, китайцы пользовались ею только на счетной доске.

О счете с помощью палочек упоминал еще философ Мэн-цзы (372—289 до н. э.). Первым дошедшим до нас письменным свидетельством об этом счете

Суаньпань



	Китайские			Цифры Корейские	Цифры пещерной надписи Козик	Цифры ацтеков	Цифры племени моя
	Старые	Коммерческие	Научные				
	1	2	3	4	5	6	7
0		〇	〇				〇
1	一	1	1	1	—	·	·
2	二	11	11	11	=	..	..
3	三	111	111	111	≡	∴	...
4	四	ㄨ	1111	ㄨ	ㄗ:4	∴	
5	五	ㄨ	11111	1ㄨ	ㄗ:3	∴	—
6	六	ㄨ	11111	11ㄨ	ㄗ	∴	—
7	七	ㄨ	11111	11111	ㄗ	∴	—
8	八	ㄨ	11111	ㄨㄨ	ㄗ:ㄗ	∴	—
9	九	ㄨ	11111		ㄗ	∴	—
10	十	ㄗ	10	ㄗ	ㄗ:ㄗ	◇	—
15	十五	ㄗ:ㄗ	11111			◇:∴	—
20	二十	ㄗ:ㄗ	11111	10	3	0	P
30	三十	ㄗ:ㄗ	11111	11111			P◇
40	四十	ㄗ:ㄗ	11111	11111		ㄨ	PP
50	五十	ㄗ:ㄗ	11111	11111	233		PP◇
60	六十	ㄗ:ㄗ	11111	10	333		PPP
70	七十	ㄗ:ㄗ	11111	110	2333	ㄨ	PPP◇
80	八十	ㄗ:ㄗ	11111	1110			PPPP
90	九十	ㄗ:ㄗ	11111	11110			PPPP◇
100	百	ㄗ	100	ㄗ1	ㄗ	1	
200	二百	110	1100	ㄗ11	ㄗ	11	
400	四百	ㄨ0	111100			1111	
500	五百	ㄨ0	111100		ㄗㄗ	1111	
1000	千	千	1000		ㄗ	1111	
8000	八十	ㄗ千	1111000		ㄗㄗ	1111	
10000	萬	万	10000				

Числовые знаки разных народов

строкам: частное, делимое и делитель. Сунь-цзы отмечает взаимную обратность этой операции умножению. Исторически умножение и деление были освоены независимо друг от друга, и только потом была установлена связь между ними. Это хорошо видно в древних китайских задачах, из «Математики в девяти книгах», где произведение интерпретировалось как площадь поля, а частное — как доля, которую получает каждый участник при делении некоторого количества предметов, например монет. В традиционную форму распределения облакалось даже деление дробей.

Отметим, что в Китае существовала компактная таблица умножения от $9 \cdot 9 = 81$ до $1 \cdot 1 = 1$ (без повторений), которая распевавалась учениками.

В старинной китайской математической литературе имеются и другие числовые таблицы, например таблица всех произведений m^2n^2 , где $m = 9, 8, 7, \dots, 1$; $n = m, \dots, 1$, включающая квадраты, кубы и четвертые степени чисел. Таким образом, больших чисел, обширных числовых таблиц и сложных вычислений математики древнего Китая не боялись.

«Математика в девяти книгах»

Древнейшие математические трактаты дошли до нас в редакции II в. до н. э., но, по-видимому, это обработки более древних сочинений. «Математический трактат об измерительном шесте» посвящен главным образом астрономии. Из математических вопросов здесь следует отметить формулировку теоремы Пифагора и вычисления с дробями.

«Математика в девяти книгах» была окончательно отредактирована финансовым чиновником Чжан Цаном (ум. 150 до н.э.). Эта книга предназначена для землемеров, инженеров, чиновников и торговцев. В ней собрано 246 задач, изложенных догматически: сначала формулируется задача, затем сообщается ответ и в весьма сжатой форме указывается способ решения. Книжки, входящие в состав этого сочинения, имеют различный математический уровень и явно были написаны в разное время: последние книжки, возможно были сочинены самим Чжан Цаном, а первые относятся к гораздо более раннему времени. I книга «Измерение полей» посвящена арифметике дробей и вычислению площадей различных плоских фигур. Во II книге «Соотношения между различными видами зерновых культур» решаются задачи на пропорции. В III книге «Деление по ступеням» содержатся задачи на деление пропорционально данным числам. IV книга «Шiao-гуан» (труднопереводимый термин) посвящена отысканию стороны прямоугольника по площади и другой стороне, стороны квадрата — по его площади, ребра куба — по его объему, а также определению диаметров кругов и сфер. В V книге «Оценка работ», измеряются объемы стен, каналов, плотин, рвов различной формы и вычисляется число рабочих, необходимых для выполнения разнообразных строительных работ. В VI книге «Пропорциональное распределение» решается задача «справедливого» распределения налога и поставок между уездами в зависимости от различных условий, а также более сложные арифметические задачи. В VII книге «Избыток и недостаток» решаются системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными с помощью правила двух ложных положений и другие задачи на это правило. VIII книга «Фан-чэн» посвящена решению систем n линейных уравнений с n неизвестными с помощью специального метода фан-чэн. В IX книге «Гоу-гу» решаются задачи, связанные с теоремой Пифагора («гоу» — меньший, обычно горизонтальный катет прямоугольного треугольника,

«гу» — большой, вертикальный катет, а «гоу-гу» — зависимость, выражаемая теоремой Пифагора).

Эти два трактата вошли в сборник десяти трактатов, который был составлен Чжень-фаном в VII в. Из других работ этого сборника отметим «Трактат о морском острове» Лю Хуэя (III в.), посвященный решению задач на определение расстояний до недоступных предметов и размеров этих предметов, «Математический трактат» Сунь-цзы (III в.), содержащий математические таблицы, арифметические задачи, задачи на системы линейных уравнений и геометрические задачи, связанные главным образом с установлением соответствия между единицами различных размерностей, и «Математический трактат пяти ведомств», включающий задачи практического содержания.

Дроби

Дроби у китайцев появились почти одновременно с целыми числами, задолго до отрицательных чисел. Первыми дробями были $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, называвшиеся «половиной», «малой половиной» и «большой половиной» соответственно (эти названия применялись как в обиходе, так и в математических текстах).

В китайских правилах операций с дробями читатель найдет ничего необычного, но именно это и нетривиально, так как дроби в истории арифметики многих народов долгое время считались одним из самых запутанных разделов.

Ко II до н. э., как это видно из «Математики в девяти книгах», китайцам удалось достаточно полно разработать все операции с дробями. С помощью алгоритма Евклида, но, в отличие от «Начал», в число арифметической формы, отыскивался наибольший общий делитель числителя и знаменателя, необходимый для сокращения дроби.

Сложение и вычитание представлено общими правилами, отличающимися от современных лишь незначительно: вместо наименьшего общего кратного знаменателей берется просто их произведение.

Умножение и деление дробей интерпретировалось на конкретных задачах определения площади земельного участка и распределения некоторого количества, например, монет между равноправными участниками дележа. Площадь прямоугольного поля, стороны которого (в древности это «ширина» и «длина») измерены и выражены в общем случае смешанными числами (иррациональностей еще не знали), достаточно убедительно интерпретирует произведение дробей. Тем самым правило перемножения числителей и знаменателей было подкреплено геометрическим представлением.

По-видимому, подойти к делению дробей, как к обратной задаче было гораздо сложнее (хотя такие задачи решались). Поэтому для китайского математика проще было прибегнуть к традиционной задаче о дележе. Правда, при этом пришлось считать, что и число участников может быть дробным. Это, как видно, не смущало китайских математиков, они охотно прибегали к тому, чтобы в старой форме задачи использовать новое понятие, возникшее при ее обобщении.

В первой задаче на деление дроби $8\frac{1}{3}$ цзяня (монеты) распределяются между 7 людьми. За нею следует задача с более общим условием: «Теперь имеется $3\frac{1}{3}$ человека, делится (между ними) $6\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$ цзяня». Деление дробей

в этих задачах производилось большей частью не так, как это делают теперь, а путем приведения дроби к общему знаменателю.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = \frac{ad}{cb}.$$

Впоследствии Чжан Цю-цзянь (V в.) перешел к применяемому нами правилу, при котором деление на дробь заменяется умножением на перевернутую дробь. Первоначальное правило, так же как и наше (встречающееся у многих народов), предполагает, что дробь m/n рассматривается не как результат деления $m : n$, а как целое число m новых единиц, в n раз меньших прежней, вследствие чего при любом действии над дробями с разными знаменателями их приводили к общему знаменателю. При нашем же правиле дробь рассматривается как пара чисел. Переход к этому правилу, несомненно, произошел под влиянием того, что на счетной доске дробь изображалась парой чисел и действия над дробями принимали вид действий с парами чисел.

В III в. н. э. у китайцев, пользовавшихся десятичной системой мер, по существу, начали появляться десятичные дроби, первоначально в метрологической форме. С помощью таких десятичных дробей давались приближенные выражения иррациональностей — нецелых корней, а затем и π . Уже Лю Хуэй (III в.), комментируя извлечение корней в «Математике в девяти книгах», рекомендовал пользоваться дробями со знаменателями 10, 100 и т. д., т. е., по-видимому, он имел в виду правило

$$\sqrt[N]{N} = \frac{1}{10^k} \sqrt[N]{N \cdot 10^{2k}}.$$

Правило двух ложных положений

Некоторые книги «Математики в девяти книгах» посвящены решению задач, сводящихся к системам линейных уравнений. По существу, алгебраические тождественные преобразования применяются в этом сочинении и во многих арифметических и геометрических задачах.

VII книга этого сочинения, называемая «Избыток — недостаток», посвящена задачам, решаемым с помощью правила двух ложных положений. Это правило впоследствии попало в арабские, затем и западноевропейские руководства. Любопытно, что европейцы считали это правило индийским, по-видимому, вместе с заимствованной через арабов новой десятичной позиционной арифметикой, хотя до сих пор его не удалось обнаружить в индийских подлинниках. Вероятно, математики стран ислама заимствовали это правило непосредственно из китайских источников. Метод, применяемый в книге «Избыток — недостаток», состоит в том, что если x_1, x_2 — два «ложных» значения x , то при подстановке их в левую часть уравнения $ax = b$ получаются «ошибки»

$$y_1 = ax_1 - b,$$

$$y_2 = ax_2 - b.$$

Обычно $x_1 < x < x_2$, и ошибки имеют разные знаки, т. е. являются «избытком» и «недостатком». Эти термины позволяют обходиться без отрица-

тельных чисел, а потому мы должны, вообще говоря, рассматривать отдельно три варианта правила: когда имеется избыток и недостаток, когда имеются два избытка или два недостатка, и когда имеется избыток (или недостаток) и «равновесие», т. е. y_1 или $y_2 = 0$. Однако в данном случае китаицы пользовались только первым вариантом.

Из пропорции

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1}{y_2}$$

неизвестная определялась по правилу

$$x = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1)$$

Числитель и знаменатель этого выражения легко строились с помощью таблицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

выкладывавшейся на счетной доске. Преимущество этого правила состояло в том, что оно не требовало никаких алгебраических методов, было удобным и легко запоминающимся и не отказывало как при решении линейных уравнений, так и при решении более общих задач, когда получалось уже не точное, а приближенное значение. Условия некоторых из этих задач выразились бы в наших символах довольно сложно, например формулой для сложных процентов. Этот метод применялся и в случае систем двух уравнений с двумя неизвестными. Например, задача, приводившаяся к системе

$$5x + y = 300,$$

$$x + 5y = 200,$$

сводилась к линейному уравнению

$$x = 200 - 5(300 - 5x)$$

к которому применяли правило двух ложных положений, вычисляя «избыток» и «недостаток» при $x_1 = 50$, $x_2 = 55$.

Название «избыток — недостаток» носит и другое правило, применяемое для решения другой группы задач той же VII книги. В отличие от задач на правило двух ложных положений, эти задачи однотипны, в них самих уже заданы избыток и недостаток, либо два избытка или два недостатка, либо избыток или недостаток и равновесие. Однако искомые величины здесь несколько иные: это так называемые задачи на совместную покупку. Известно число покупателей x и неизвестна стоимость вещи y . Два возможных пая a_1 и a_2 дают избыток b_1 и недостаток b_2 . Таким образом, задается система вида

$$a_1 x - y = b_1,$$

$$a_2 x - x = b_2.$$

Даны два способа решения этих задач. С одной стороны, рекомендуется исключить неизвестное y

$$a_1x - a_2x = b_1 - b_2,$$

тогда

$$x = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}, \quad y = a_2x - b_2.$$

С другой стороны, предлагается пользоваться таблицей

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix},$$

из которой надо сконструировать неизвестные:

$$y = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2}, \quad x = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}. \quad (2)$$

Если вычислить истинный пай

$$a = \frac{y}{x} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1 - b_2},$$

то связь этих задач с задачами на правило двух ложных положений становится очевидной. Несомненно, что причиной одинакового названия этих правил и объединения этих двух приемов, относившихся к тому же к задачам различных типов, послужило структурное сходство выражения для y в правилах (2) и выражения для x в правиле (1).

Возможно, что правило двух ложных положений в китайской математике возникло благодаря перенесению на задачи первого типа приемов решения задач второго типа.

Системы линейных уравнений со многими неизвестными

Метод фан-чэн, излагаемый в VIII книге, является вершиной достижений китайских математиков в решении линейных задач. Это регулярный алгоритм решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. совпадающий по существу с методом Гаусса, от которого он отличается тем, что все операции здесь производятся на счетной доске. Используя современную терминологию, можно сказать, что китайский вычислитель применял матрицу, столбцы которой представляют уравнения, а строки — коэффициенты при неизвестных и свободные члены. Слово «фан-чэн» буквально означает выстраивание чисел по клеткам. Правильное расположение чисел на счетной доске заменяло китайскому математику буквы и индексы нашей символики. А в словесном описании систем применялся условный язык специальных знаков десятиричного или двенадцатиричного календарного цикла, который мы передаем буквами A , B , V и т.д.

Приведем пример из «Математического трактата Сунь-цзы». В 28-й задаче последней книги трактата говорится, что два человека A и B получили неизвестные количества монет. Их надо определить из условия: если A добавит половину монет B или B добавит $2/3$ монет A , то в обоих случаях

получится 48. Для решения системы

$$x + \frac{1}{2}y = 48,$$

$$\frac{2}{3}x + y = 48$$

в правиле рекомендуется: «Установи в правой строке 2 для A , 1 для B и 96 монет; установи в левой строке 2 для A , 3 для B и 144 монеты». Таблица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 144 & 96 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего данную систему приводят к «каноническому» виду: в данном случае освобождаются от дробных коэффициентов, а в других случаях приводят подобные члены, переставляют неизвестные по порядку, переносят члены из одной части уравнения в другую и т. п.

Решение «канонической» системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

состоит в ее приведении к виду

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}.$$

Отсюда, восходя от последнего уравнения к первому, находят последовательно $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$. Само приведение осуществляется путем исключения шаг за шагом. Вся эта процедура производится на доске, на которой отложены в форме прямоугольной таблицы коэффициенты, и является, с нашей точки зрения, не чем иным, как преобразованием столбцов матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & \dots & a_{21} & a_{11} \\ a_{n2} & \dots & a_{22} & a_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & a_{2n} & a_{1n} \\ b_n & \dots & a_2 & b_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

к виду

$$\begin{pmatrix} & & & a_{11} \\ & & a_{22}^{(1)} & a_{12} \\ & a_{33}^{(2)} & a_{23}^{(1)} & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn}^{(n-1)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & a_{2n}^{(1)} & a_{1n} \\ b_n^{(n-1)} & \dots & b_3^{(2)} & b_2^{(1)} & b_1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Матрица (1) приводится к виду (2) путем последовательного вычитания первого справа столбца из чисел, равных произведениям соответственных элементов второго, третьего и т. д. столбцов на a_{11} причем вычитание производится до тех пор, пока вся первая строка, за исключением элемента a_{11} , не будет состоять из пустых мест (все коэффициенты «канонической» системы — целые числа). Далее аналогично поступают с подматрицей, получаемой из матрицы (2) вычеркиванием ее первой строки и первого столбца, и т. д.

В числовом примере из трактата Сунь-цзы умножение второго справа столбца на $a_{11} = 2$ дает нам таблицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 288 & 96 \end{pmatrix}.$$

Вычитая элементы первого столбца из элементов второго столбца a_{21} два раза, получим таблицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 96 & 96 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отсюда находим } y = \frac{96}{4} = 24, \quad x = \frac{96 - 24}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

Метод фан-чэн близок к методу определителей, идею которого в Европе впервые высказал Лейбниц и которую развил Крамер (1750). Однако он отличается от метода определителей принципиально. Хотя китайский вычислитель оперировал на доске с отвлеченными числами, связь таблицы с уравнениями еще очень сильна. Для создания определителей нужно было отделить от расширенной таблицы свободные члены, сделать столбцы и строки равноправными и т. д. Все это и было сделано европейскими математиками Нового времени.

Тем не менее следует заметить, что крупному японскому математику Секи Кова удалось довести метод фан-чэн до метода определителей еще в 1683 г. Однако его работа, так же как и сам метод фан-чэн, оставалась неизвестной в Европе до XIX в.

Отрицательные числа

Необходимым условием применения метода фан-чэн даже к «каноническим» системам с положительными коэффициентами было введение отрицательных чисел. Действительно, преобразование таблицы заданной системы к треугольному виду требует во многих случаях вычитания из меньшего числа большего или из «ничего» какого-то числа. Например, в ходе решения системы

$$2x = 1 - y,$$

$$3y = 1 - z,$$

$$4z = 1 - x$$

получали таблицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующий шаг (вычитание элементов третьего столбца из элементов первого) приводит к появлению отрицательного числа:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные числа выделялись на счетной доске палочками другого цвета или другой формы, а при письме записывались другими чернилами или отмечались косой чертой; для них имелось особое название — «фу», в то время как положительные называли «чжэн». Здесь непосредственно виден механизм введения нового математического объекта. Еще не зная природы объекта, сначала просто добивались того, чтобы можно было довести до конца начатые вычисления согласно определенному алгоритму. Однако следует подчеркнуть: числа фу выступали не только как разности двух чисел чжэн, но и как отдельные элементы таблиц коэффициентов. Это, вначале чисто формальное, введение чисел фу в качестве самостоятельных объектов исчисления и было решающим шагом в истории учения об отрицательных числах. Сначала числа фу появлялись и исчезали в ходе вычислений. Это были объекты, имеющие право существования лишь в период вычислений. Для чисел фу были определены правила операций:

$$\begin{aligned} (\pm a) \mp (\pm b) &= \pm (a \mp b), \\ (\pm a) \mp (\mp b) &= \pm (a \pm b), \\ 0 \mp (+b) &= \mp b, \\ 0 \mp (-b) &= \pm b. \end{aligned}$$

Вычитание формулировалось прежде всего, что еще раз указывает на происхождение отрицательных чисел из этой операции. Кроме первых двух арифметических действий, как показывают сами задачи, употреблялись также умножение и деление, хотя правила для них явно не сформулированы. Например, в задаче, сводящейся к решению системы

$$\begin{aligned} 3x + 6 &= 10y, \\ 5y + 1 &= 2x, \end{aligned}$$

требуются, в частности, оба эти действия, ибо в конце концов нужно было посчитать

$$\begin{aligned} y &= \frac{-15}{-5} = 3, \\ x &= \frac{(-6) \cdot (-5) - (-10) \cdot (-15)}{(-5) \cdot 3} = 8. \end{aligned}$$

Изобретение отрицательных чисел позволило еще более расширить класс задач, решаемых при помощи табличного метода. По задачам VIII книги «Математики в девяти книгах» можно проследить, как постепенно они вводятся в этих случаях. Сначала появляются отрицательные непер- вые члены уравнения, затем первый член и свободный член. Все они полу- чаются в результате приведения подобных членов и переноса членов из одной части уравнения в другую.

Постепенно китайские ученые пришли к истолкованию чисел «фу» в качестве долга, недостачи и т. п. Такая интерпретация позволила использо- вать числа фу и в самом задании уравнений. Так, в одной из задач «Ма- тематики в девяти книгах» решается система

$$2x + 5y = 13z + 100,$$

$$3x + 3z = 9y,$$

$$6y + 8z = 5x - 600,$$

где «— 600» передано выражением «не хватило 600 монет» или «недостаток в 600 монет». При построении таблицы о последнем уравнении говорится: «Недостаток монет отрицателен».

Китайские математики, так же как вавилонские и греческие, решили теоретико-числовую задачу о существовании целочисленных решений не- определенного уравнения:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Найденный китайцами закон составления троек «пифагоровых» чисел

$$a = \frac{p^2 - q^2}{2}, \quad b = pq, \quad c = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

позволял выделить множество прямоугольных треугольников с целочис- ленными сторонами. В связи с этим предлагался ряд задач, в которых рас- стояния — катеты проходились с определенными скоростями-коэффициен- тами, равными p , q .

Квадратные уравнения

В IX книге «Математики в девяти книгах» имеется серия задач, сводя- щихся к системе уравнений вида

$$x^2 \pm y^2 = a,$$

$$y \mp x = b,$$

равносильной квадратному уравнению. В большинстве случаев китайцы сводили эту системы к линейным или по крайней мере к неполному квад- ратному уравнению.

$$Ax^2 = B.$$

Например, система

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

$$y - x = b$$

заменялась эквивалентным ей уравнением

$$2x^2 + 2bx + b^2 = a^2.$$

Дополняя его левую часть до полного квадрата и извлекая корень, мы получили бы значение неизвестного. Но последовательность вычислений, предписанная китайским правилом, иная: формулы, выражающие это правило, получаются, если предположить, что китайцы пользовались подстановкой, которая, быть может, применялась ранее в Вавилоне:

$$x = z - \frac{b}{2},$$

$$y = z + \frac{b}{2},$$

где параметр

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}}$$

находится из неполного квадратного уравнения

$$2z^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2.$$

Впрочем, хотя в китайских текстах мы не находим правила решения квадратного уравнения в радикалах, квадратные уравнения решались, и их метод решения принципиально не отличался от этого правила, которое, как известно, основано на дополнении до полного квадрата. Такой прием не был чужд китайцам. Например, в случае системы

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

$$z = x + a,$$

$$z = y + b,$$

они получали именно полный квадрат:

$$z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = (z + y)b.$$

Первый множитель определялся, по-видимому, так:

$$\begin{aligned} + z &= x + a, \\ + y &= z - b = x + a - b, \\ z + y &= 2x + 2a - b, \end{aligned}$$

т. е.

$$x^2 = (2x + 2a - b)b = 2xb + 2ab - b^2,$$

или

$$x^2 - 2xb + b^2 = 2ab,$$

откуда

$$(x - b)^2 = 2ab, \quad x - b = \sqrt{2ab}, \quad x = b + \sqrt{2ab},$$

что совпадает с китайским правилом определения x .

Другая группа задач (в них речь идет о городских стенах в форме квадрата или прямоугольника), сводящихся к пропорциям, у которых средние члены отношений равны или отличаются на постоянную, также приводит к квадратным уравнениям. В первом случае получается двучленное уравнение, а во втором — полное квадратное уравнение.

Метод тянь-юань

В «Математике в девяти книгах» имеется описание извлечения квадратного и кубического корней, которые были разработаны к началу нашей эры. Основаны они были на применении формулы квадрата и куба суммы двух чисел, но имелись некоторые специфические особенности, проистекавшие от применения счетной доски. В дальнейшем этот метод был обобщен на случай любого корня и вообще решения уравнения n -й степени численным методом, который стал известен в XIX в. как метод Руффини — Горнера. В Китае этот метод получил название «тянь-юань» (дословно «небесный элемент», как китайцы обозначали неизвестную величину). Он состоит в том, что, например, для уравнения n -й степени $f(x) = 0$, имеющего действительный корень $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, записанный в десятичной системе, подбором находится целая часть корня α_1 . Затем от $f(x) = 0$ переходят к уравнению $\varphi(y) = 0$, где $y = \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Для этого делают подстановку $y = 10x' = 10(x - \alpha_1)$. Снова подбором определяют α_2 и т. д., так что значение корня вычисляется с точностью до нужного десятичного знака.

Схема вычислений коэффициентов вспомогательных уравнений в методе Горнера весьма удобна. Переход от уравнения $f(x) = 0$ к $\varphi(y) = 0$ совершается в два приема: сначала переходят к $f(x') = f(x - \alpha_1)$, что легко производится по схеме Горнера, разработанной для деления многочлена $f(x)$ на $x - \alpha_1$. Последовательное деление дает коэффициенты разложения $f(x)$ по степеням $x - \alpha_1$, т. е. коэффициенты уравнения $f(x - \alpha_1)$. Затем с помощью подстановки $y = 10x'$ переходят к уравнению $\varphi(y) = 0$. Для этого полученные по схеме Горнера коэффициенты уравнения $f(x')$ последовательно делятся на степени 10, т. е. на 1, 10, 10², ..., 10ⁿ.

Процедура извлечения корней, как она изложена в «Математике в девяти книгах», складывается из подбора очередной цифры корня и преобразования чисел, установленных на счетной доске, к виду, удобному для подбора следующей цифры корня (это соответствует линейной подстановке и вычислению коэффициентов вспомогательных уравнений).

Прежде всего вычислителю предлагается определить число знаков целой части корня и тем самым установить количество этапов вычислений для этой целой части. Очередная цифра корня подбирается так же, как при делении. Следует отметить, что все правила извлечения корня у китайцев тесно связаны с терминологией деления, что объясняется также близостью задач, приводящих к этим операциям: к делению приводит определение стороны прямоугольника по его площади и другой стороне («приложение» древних греков), а к извлечению квадратного корня — определение стороны квадрата с данной площадью. Несмотря на геометрическое происхождение задачи извлечения корня, правило извлечения корня у китайцев было чисто алгебраическим. Это правило состоит в следующем. Пусть

$$x = \sqrt{N} = 100\alpha_1 + 10\alpha_2 + \alpha_3.$$

Тогда

$$A_1 - (B_1 + C_1\alpha_2)\alpha_2 - B_2\alpha_3 - C_2\alpha_3^2 = 0,$$

где

$$A_1 = N - (100\alpha_1)^2, \quad B_1 = 2000\alpha_1, \quad C_1 = 100, \quad B_2 = 200\alpha_1 + 20\alpha_2, \quad C_2 = 1.$$

Цифра α_1 — максимальная, для которой выполняется условие

$$A_1 \geq 0.$$

Далее подготавливают счетную доску к подбору второй цифры корня. Для этого сдвигают единичную счетную палочку на два разряда вправо, т. е. устанавливают $C_1 = 100$, находят остаток

$$A_1 = N - (100\alpha_1)^2$$

и число

$$B_1 = (2 \cdot 100\alpha_1) \cdot 10 = 2000\alpha_1.$$

Цифра α_2 — максимальная, для которой выполняется условие

$$A_1 - (B_1 + C_1\alpha_2)\alpha_2 \geq 0,$$

или

$$[N - (100\alpha_1)^2] - (2000\alpha_1 + 100\alpha_2)\alpha_2 \geq 0,$$

т. е.

$$N - (100\alpha_1 + 10\alpha_2)^2 \geq 0.$$

Далее подготавливают счетную доску к подбору третьей цифры корня α_3 . Для этого сдвигают единичную счетную палочку еще на два разряда вправо, т. е. устанавливают

$$C_2 = \frac{C_1}{100} = 1,$$

вычисляют остаток

$$A_2 = N - (100\alpha_1 + 10\alpha_2)^2$$

и числа

$$B_2 = \frac{(B_1 + C_1\alpha_2) + C_1\alpha_1}{10} = 200\alpha_1 + 20\alpha_2, \quad C_2 = \frac{C_1}{100} = 1.$$

Цифра α_3 находится из условия

$$N - (100\alpha_1 + 10\alpha_2 + \alpha_3)^2 = 0.$$

Схема расположения чисел в указанных трех положениях имеет вид

Корень	α_1	α_2	α_3
Делимое	N	A_1	A_2
Делитель	$10\,000\alpha_1$	B_1	B_2
Единичная счетная палочка	$10\,000$	C_1	C_2

Мы видим, что числа A_i , B_i и C_i определяются по схеме Горнера, это особенно наглядно видно для случая квадратного корня на числах A_2 , B_2 , C_2 . Деление на степени десяти — распространенный прием, он выпол-

няется на доске простым сдвигом счетных палочек вправо. Этот метод применялся в «Математике в девяти книгах» только для вычисления корней, но использование его для вычисления кубического корня приводит на втором этапе к применению этого же метода для решения полного квадратного уравнения. Цзю Чун-чжи (V в.) и Ван Сяо-тун (VII в.) решали этим методом кубические уравнения типа $x^3 + ax^2 = b$, а последний — и полное кубическое уравнение.

Развитие и завершение разработки метода тянь-юань в общем виде принадлежит трем крупнейшим алгебраистам XIII—XIV вв. — Цинь Цзю-шао, Ли Е, Чжу Ши-цзе, олицетворявшим расцвет китайской математики в начале монгольского владычества в Китае. Цинь Цзю-шао этот метод применял к уравнению четвертой степени

$$-x^4 + 763\,200x^2 - 40\,642\,560\,00 = 0,$$

где $x = 840$.

Чжу Ши-цзе, кроме линейной подстановки, производил подстановку $y = z/a$, которая делала коэффициент при старшем члене равным единице. Подстановка давала возможность отыскивать дробные рациональные значения корней. Например, в уравнении

$$576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1695252 = 0,$$

решенном Чжу Ши-цзе, $x = 8\frac{2}{3}$. Здесь он пользовался подстановками

$$x = y + 8, \quad y = \frac{z}{576}.$$

В сочинениях этих ученых коэффициенты уравнений записывались сверху вниз в порядке возрастания степеней, неизвестных, а вместо отсутствующих ставилась звездочка. Для неизвестной и свободного члена употреблялись знаки — иероглифы, обозначающие слова «небо» и «большой». Для применения схемы Горнера уравнение записывали в канонической форме таким образом, что все члены оказывались в одной части равенства, что требовало отрицательных чисел.

Основное сочинение Чжу Ши-цзе «Яшмовое зеркало четырех элементов» (1303) интересно тем, что в нем решались нелинейные системы с четырьмя неизвестными, называемыми небом, землей, человеком и вещью. Запись производилась так же, как в случае одного неизвестного, но по четырем направлениям. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2xw + 2yz + 2yw + 2zw = 0$$

представлялось схемой

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & (w) & & \\ & & & & 1 & & 2 \\ & & & 2 & 0 & 2 & \\ (y) & 1 & 0 & * & 0 & 1 & (z) \\ & & 2 & 0 & 2 & & \\ & & 2 & & 1 & & \\ & & & & (x) & & \end{array}$$

(здесь звездочка (*) поставлена вместо отсутствующего свободного члена). Системы решались последовательным исключением неизвестных.

В трактате Чжу Ши-цзе приводится также треугольная таблица чисел, являющихся биномиальными коэффициентами вплоть до восьмой степени. Математик того же времени Ян Хуэй указывает, что такой таблицей до шестой степени располагал Цзя Сянь, написавший около 1100 г. «Объяснение таблиц ценного метода извлечения корней». Название труда Цзя Сяня дает основание предполагать, что эта таблица применялась при извлечении корней.

Биномиальные коэффициенты были известны индийским математикам еще во II в. до н. э., где они использовались в комбинаторных задачах. Возможно, что эти коэффициенты попали в Китай с буддистскими учеными.

Теоретико-числовые задачи

Из задач, относящихся к теории чисел, упомянем 26-ю задачу последней книги трактата Сунь-цзы: требуется найти число, которое при делении на 3, 5 и 7 даст соответственно остатки 2, 3 и 2. Задачи такого типа возникли в теории календаря. Метод решения подобных задач подробно излагался Цинь Цзю-пао. Задача Сунь Цзо-цзы с теми же числовыми данными и в других вариантах приводится в «Книге абака» Леонардо Пизанского в 1202 г., через сто лет — в одной византийской рукописи, в XV в. эта задача с различными числовыми данными встречается в немецких рукописных арифметиках, в XVII в. — в русских математических рукописях. Древнекитайский метод решения этих задач был вновь разработан Эйлером в 1740 г. и со всей полнотой изложен в § 32—36 «Арифметических исследований» Гаусса (1801). Эйлер и Гаусс не знали, что этой задачей занимались в Китае за полторы тысячи лет до них.

Другой популярной теоретико-числовой задачей была «задача о птицах», также восходящая к V в.: сколько можно купить на 100 монет петухов, кур и цыплят — всего 100 птиц, если петух стоит 5 монет, курица — 4 монеты, а четыре цыпленка — 1 монету; решение: 15 петухов, курица, 84 цыпленка. Аналогичные задачи встречались также у индийца Бхаскары (XII в.), египтянина Абу Камилы (X в.) и самаркандского математика ал-Каши (XV в.). В Европе аналогичная задача встречается впервые в сборнике Алкуина (VIII в.).

Математики Китая занимались также составлением так называемых магических квадратов, т. е. таким распределением n^2 последовательных натуральных чисел 1, 2, ..., n^2 в квадратной таблице, при котором суммы чисел в каждом из столбцов и строк одинаковы, и, значит, равны $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$.

В частности, этот вопрос разбирается в работе Ян Хуэя 1275 г. Магическими квадратами занимались многие средневековые математики стран ислама, Византии и Западной Европы.

Интерполирование

С календарными и астрономическими расчетами была связана разработка в Китае интерполяционных приемов, позволяющих приближенно находить по небольшому числу эмпирических данных значения функций, заданных таблицами, между точками задания табличных значений. Около 600 г. астроном и математик Лю Чжо применил с этой целью квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$, коэффициенты которого выражаются через раз-

ности первого и второго порядков при равноотстоящих значениях аргумента. Правила Лю Чжо использовали в календарных расчетах VII и IX вв. Вскоре после Лю Чжо астроном И Синь распространил его правила на случай неравноотстоящих значений аргумента. Правила Лю Чжо и И Синя для интерполяции функции $f(x)$, принимающей в точках x_0, x_1, x_2 заданные значения, состоит в замене функции трехчленом

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \\ + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}.$$

В XIII в. аналогичное интерполирование с помощью многочлена третьей степени, коэффициенты которого выражаются через разности первого, второго и третьего порядков, было предложено Го Шоу-цзином (1231—1316), придворным астрономом монгольского хана Хубилая, работавшим в Ханбалыке.

Правила Лю Чжоу и Го Шоу-цзина представляют собой частные случаи интерполяционных формул, предложенных в конце XVII в. в Англии Дж. Грегори и И. Ньютоном.

Суммирование рядов

В VI книге «Математики в девяти книгах» имеется одна задача на арифметическую прогрессию: требуется найти члены прогрессии, состоящей из девяти членов, по сумме четырех первых и трех последних членов. Вопросы суммирования рядов занимались и позднейшие китайские математики, возможно под влиянием индийцев. Шэнь Ко (XI в.) в «Рассуждениях Мэн-си» подсчитал число предметов, образующих n -слойную ступенчатую усеченную пирамиду, в которой стороны прямоугольных слоев последовательно увеличиваются на единицу. Если в наименьшем слое ab предметов, то в k -м слое $(a + k - 1) \cdot (b + k - 1)$ предметов и искомое число выражается суммой

$$\sum_{k=1}^n (a + k - 1)(b + k - 1) = \\ = \frac{n}{6} [a(3b + n - 1) + (a + n - 1)(3b + 2n - 2) + n - 1].$$

Предпосылками вывода, которого Шэнь Ко не сообщает, должны были служить правила суммирования арифметической прогрессии и ряда натуральных квадратов. В XIII в. Чжу Шэнь-цзе суммирует ряды, возникающие при перемножении натуральных, треугольных и квадратных чисел с членами возрастающей или убывающей прогрессии.

Геометрические задачи

IX книга «Математики в девяти книгах» посвящена геометрическим задачам, при решении которых применяется теорема Пифагора.

В древнекитайском «Трактате об измерительном шесте» указывается, что теорема Пифагора для прямоугольного треугольника со сторонами 3,

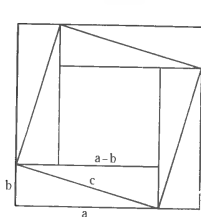


Рис. 46

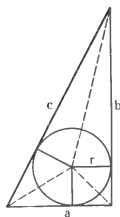


Рис. 47

4, 5 была известна Шан Гао за 1100 лет до н. э. а в в общем случае — Чэнь-цзы, жившему в VI в. до н. э. В комментариях к этой книге указано, что доказательство этой теоремы было основано на чертеже, в силу которого квадрат, построенный на сумме катетов a и b прямоугольного треугольника, может быть представлен в виде суммы квадрата, построенного на разности этих катетов, и четырех прямоугольников со сторонами a и b и в виде суммы квадрата, построенного на гипотенузе c треугольника и четырех треугольников, конгруэнтных данному (рис. 46), т. е.

$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2 = 2ab + c^2,$$

откуда вытекает соотношение

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Среди задач IX книги «Математики в девяти книгах» следует упомянуть задачи о камыше, растущем в середине квадратного водоема, и о сломанном тростнике, касающемся вершиной земли на некотором расстоянии от корня, имеющиеся в сочинениях индийских математиков Брахмагуны (VII в.) и Бхаскары (XII в.); на стр. 50—51 мы встречались с аналогичными вавилонскими задачами. В задачах этого типа требуется определить b и c из соотношения

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

по известным a и $c \mp b$. Правило решения этих задач можно выразить формулами

$$c \mp b = \frac{a^2}{c \mp b},$$

$$c - b = k.$$

Тогда либо

$$2c = \frac{a^2}{k} + k, \quad c = \frac{\frac{a^2}{k} + k}{2},$$

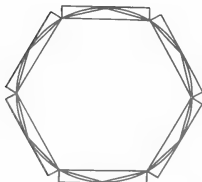


Рис. 48

либо

$$2b = \frac{a^2}{k} - k, \quad b = \frac{\frac{a^2}{k} - k}{2}.$$

Китайцы умели определять также выражение радиуса r круга, вписанного в прямоугольный треугольник, через заданные катеты a и b (рис. 47):

$$2r = \frac{2ab}{a + b + c}, \quad \text{где } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Это значит, что китайским математикам были известны такие геометрические факты, как перпендикулярность радиусов в точках касания касательным, равенство отрезков касательных от точки касания до точки пересечения и т. д. В одной задаче рассматривается вписанный в круг прямоугольный треугольник, причем используется то, что угол опирающийся на диаметр, прямой.

Комментатор «Математики в девяти книгах» Лю Хуэй в «Трактате о морском острове» определял расстояния до недоступных предметов и размеры этих предметов (высоту морского острова, глубину оврага, ширину реки и т. д.), используя пропорциональность соответственных сторон подобных фигур.

В I—III вв. китайские астрономы и математики, возможно, под влиянием идей, проникавших из Греции через Индию, занимались уточнением отношения окружности к диаметру. Астроном и философ Чжан Хен (78—139) нашел, что квадрат длины окружности относится к квадрату параметра описанного около нее квадрата, как 5 : 8, что соответствует $\pi = \sqrt{10} = 3,162...$ Это приближение, имеющее погрешность менее 1%, применял Цзинь Цзю-шао в 1247 г., оно встречается и у Брахмагупты (VII в.) и ал-Хорезми (IX в.). Ученый-полководец Ван Фань (ум. 267) получил лучшее приближение $\pi = 142/45 = 3,155...$ Методы этих вычислений нам неизвестны, но Лю Хуэй в комментариях к «Математике в девяти книгах» рассматривал вписанные в круг правильные многоугольники. Основываясь на том, что площадь S круга меньше фигуры, составленной из вписанного в него n -угольника и описанных около остаточных сегментов круга прямоугольников (рис. 48), пришел к неравенствам

$$S_{2n} < S < S_n + 2(S_{2n} - S_n),$$

где S_n и S_{2n} — площади правильных n - и $2n$ -угольников. В случае круга с радиусом, равным 10, при $n = 96$ Лю Хуэй получил

$$314 \frac{64}{625} < S < 314 \frac{169}{625}.$$

На этом основании он принял за приближенное значение площади этого круга 314, что соответствует $\pi = 3,14$. Продолжив вычисление до $n = 3072$, Лю Хуэй получил более точное приближение, в десятичных дробях равное 3,14159. С еще большей точностью значение π было вычислено астрономом, математиком и инженером Цзу Чун-чжи (430—501), который в недошедшем до нас трактате доказал, что

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927.$$

Ему же принадлежит приближение $\pi = 355/113$, равное одной из подходящих дробей при разложении π в непрерывную дробь. Точность этих вычислений была превзойдена только ал-Каши в XV в., приближение $\pi = 355/113$ вновь нашел голландец В. Ото в XVI в.

Значение математики древнего и средневекового Китая

Обзор математики Китая показывает, что она развивалась до XIV в. преимущественно как совокупность вычислительных алгоритмов, предназначенных для решения на счетной доске некоторых классов задач арифметики, алгебры и геометрии. Наиболее значительными из этих алгоритмов являются метод фан-чэн решения систем линейных уравнений и метод тяньюань решения алгебраических уравнений высших степеней. Математики Китая широко пользовались алгебраическими и геометрическими преобразованиями, располагали доказательствами ряда тождеств и геометрических теорем, хотя китайская наука имела мало общего с дедуктивной наукой греческого образца. Важнейшим достижением китайских математиков было введение отрицательных чисел, которым они дали простейшее толкование.

Китайская математика не была изолирована от развития математики в других странах. И, хотя научные взаимосвязи Китая и других стран изучены еще недостаточно, мы уже сейчас можем указать на ряд несомненных фактов взаимного влияния математики Китая, Индии и стран ислама. Появление отрицательных чисел, доказательства теоремы Пифагора и некоторых характерных задач в Индии через несколько столетий после их появления в Китае указывает на несомненный культурный обмен между этими странами в первые столетия нашей эры; об этом же свидетельствует близость китайской и индийской нумераций. Мы уже говорили о буддистских учениках в Китае в VII в. О культурном обмене между Китаем и Средней Азией свидетельствует появление в Средней Азии правила двух ложных положений, метода Горнера для извлечения корней любой степени и десятичных дробей после их появления в Китае; мы уже указывали на взаимные посещения ученых Китая и стран ислама в XIII—XV вв. Через Индию и страны ислама математика Китая оказывала влияние на математику Европы, хотя многие важные открытия математиков Китая стали известны в Европе значительно позже того, как европейские ученые пришли к этим открытиям самостоятельно. Дальнейшие исследования, несомненно, прольют новый свет на взаимное влияние математики средневекового Китая и других стран.

ВТОРАЯ ГЛАВА

ИНДИЯ

Древняя и средневековая Индия

Еще в середине III тысячелетия до н. э. в долине Инда существовала развитая цивилизация, одним из центров которой был город, раскопанный вблизи холмов Мохенджо-Даро. Эта цивилизация, основанная первоначальным населением Индии, во II тысячелетии до н. э. была разрушена арийскими племенами, пришедшими с Гималаев. Потомками первоначального населения Индии являются дравиды Южной Индии. Завоеватели, создали рабовладельческие государства в I тысячелетии до н. э. В этих государствах велась борьба за власть, главным образом между воинами — кшатриями и священниками — брахманами, нередко вспыхивали восстания угнетенных сословий и каст. В I тысячелетии до н. э. появляются священные книги брахманов «Веды» («Знания»). К VII—V вв. до н. э. относятся первые индийские письменные математические памятники.

В V в. до н. э. в Индии возникает новая религия — буддизм, отражавшая недовольство угнетенных слоев. Не позже IX в. до н. э. была установлена связь Индии с Вавилоном.

В VI в. до н. э. часть Северной Индии была захвачена персидским царем Дарием. В 327—325 гг. до н. э. еще большая часть Северной Индии была завоевана Александром Македонским, а впоследствии вошла в состав царства Селевкидов. Вождь восстания против греков Чандрагупта основал новую династию Маурья в Магадхе (ныне Бенгалия) со столицей в Паталипутре (ныне Патна). Внук Чандрагупты Ашока (273—232 гг. до н. э.) объединил почти всю Северную Индию и значительную часть Южной Индии, при нем буддизм становится государственной религией индийцев. Часть Индии, входившая в царство Селевкидов, вместе с сюзом Средней Азии и Афганистаном в III в. до н. э. вошла в состав Греко-Бактрийского царства, оставившего заметный след в развитии культуры Индии. В I в. до н. э. эти земли вошли в царство Великих Кушан, во главе которого стояли скифские завоеватели. Государство Кушан установило торговые отношения с Китаем и Римом.

В IV в. н. э. Северную и Центральную Индию объединила династия Гупта. В это время появляются астрономо-математические труды «сидхханты» («учения»). В царстве Гупт в V—VI вв. работают уроженец Паталипутры Ариабхата и уроженец Удджайны Варахамихира, в VII в. в Удджайне работает Брахмагупта. В VII—VIII вв. «сидхханты» и труды Ариабхаты и Брахмагупты становятся известны в странах ислама и переводятся на арабский язык. В это же время переводятся на персидский и арабский языки многие произведения индийской литературы, например «Калила и Димна».

В VIII в. многовековая борьба между буддизмом и древней индийской религией заканчивается победой последней. Буддисты изгоняются из Ин-

дии и уходит в другие страны (ныне буддизм — основная религия в Бирме, Тибете и Монголии и широко распространенная религия в Японии и Китае).

В это же время Северная Индия подвергается нападениям мусульманских завоевателей. В XI в. Северную Индию захватывает Махмуд Газневи. Основанная им династия правит в Северной Индии и после его изгнания из Ирана.

После опустошительных войн в Северной Индии центр науки и культуры переносится в Южную Индию. Здесь работают математики и астрономы Магавира (IX в.), Шридхара (IX—X вв.), Бхаскара (XII в.), Нараяна (XIV в.), Нилаканта (XV—XVI вв.).

В начале XIII в. почти вся Индия объединяется Делийским султаном. В XVI в. значительная часть Индии была покорена Бабуром, потомком Тимура; основанная им империя по имени монгольских предков Тимура называется империей Великих Моголов.

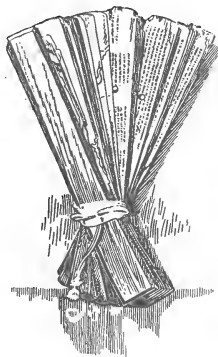
Последним ярким событием научной жизни Индии перед ее завоеванием европейцами была деятельность правителя Раджпутаны (ныне Раджастан) Савай Джай Сингха (1686—1743), основавшего несколько астрономических обсерваторий в Северной и Центральной Индии и составившего астрономические таблицы.

Большинство научных трактатов индийцев написаны на санскрите — языке религиозных книг брахманов. Этот язык объединял многочисленные народы Индии, говорившие на различных языках. Только в XVII в. индийцы стали писать научные трактаты на разговорных языках: анонимный южно-индийский трактат «Йукти бхаша» («Разъяснение математики») написан на языке малайялам, а астрономические таблицы Савай Джай Сингха — на распространенном в Северной Индии персидском языке.

Следует отметить, что наши сведения о математике древней и средневековой Индии весьма неполны и о некоторых этапах развития индийской математики мы можем судить только предположительно. Некоторые сведения о математике древней Индии мы черпаем из комментариев к священной книге брахманов «Веды». В одной из таких книг, относящейся к VII—V вв. до н. э., «Шулва сутра» («Правила веревки») излагаются способы построения алтарей и связанные с ними вычисления.

Первые «сиддханты», появившиеся в V в. н. э., имеют явно эллинистическое происхождение. «Пулиса-сиддханта» приписывается некоему Паулисе из Саянтры. По-видимому, ее автором был александрийский астроном Паулос, бежавший в Индию после разгрома научного центра в Александрии. О греческом происхождении свидетельствует и название «Ромака-сиддханта»: жителей Восточной Римской империи часто называли ромеями (впоследствии арабы называли их румами). В сиддхантах применяются некоторые греческие термины: расстояние от центра называется «кендра» (от греческого *κέντρον* — центр), минута — «липта» (от греческого *λεπτή*). Важнейшая из сидханта была написана Брахмагуптой около 628 г. Она называлась «Брахма-спхута-сиддханта» («Усовершенствованное учение Брахмы») и состояла из 20 книг, большая часть которых была отведена астрономии, но XII книга была специально посвящена арифметике и геометрии, а XVIII книга — алгебре.

Многие трактаты были написаны в стихах, чтобы правила, сформулированные в коротких строках, можно было заучить наизусть. Например, «Тришатика» Шридхары (IX — X вв.) получила свое название от слова



Рукопись «Лилавати», написанная на пальмовых листьях ок. 1400 г. Из коллекции Д. Ю. Смиты (D. E. Smith. History of mathematics. New York, 1951, v. 1, p. 26).

«тришата» — «триста», так как содержала триста стихов. Весьма краткое стихотворное изложение, почти непонятное непосвященным, разъяснялось в комментариях.

Крупнейшему индийскому математику XII в. Бхаскаре принадлежит трактат «Сиддханта-широмани» («Венец учения»), переписанный в XIII в. на полосках пальмовых листьев. Этот трактат состоит из четырех частей, из которых «Лилавати» («Прекрасная») посвящена арифметике, а «Биджаганита» — алгебре, остальные две части астрономические. Название «Лилавати» относится то ли к дочери ученого, к которой автор обращается с задачами, то ли к самой арифметике.

Индийская нумерация

Счет целых чисел в Индии с древних времен носил десятичный характер. Санскрит — индоевропейский язык, родственный индоевропейским языкам Европы (для сравнения приведем числительные 1 — эка, 2 — дви, 3 — три). В названиях чисел применялся и аддитивный и субтрактивный принципы; например, 19 можно было назвать и «навадаша», (девять-десять) и «экауна — вимсати» (без одного двадцать). В отличие от других индоевропейских языков, в санскрите существуют названия для 10^n до $n > 50$.

Одной из первых нумераций, применявшихся в Индии, были цифры «карошти», которыми пользовались в Северной Индии со времени персид-

ского завоевания до III в. н. э. вместе с сирийским письмом. Цифры карошты были во многом похожи на финикийские: числа записывались справа налево, знаки для 1 и 10 были весьма близки к финикийским, имелся знак для 20, представляющий собой соединение двух знаков для 10, и знак для 100, который, как и в финикийской нумерации, не повторялся, а справа от него записывалось число сотен. Однако, в отличие от финикийских цифр, здесь употреблялся специальный знак для 4. Цифры карошты изображены в четвертом столбце таблицы на стр. 159.

Начиная с VI в. до н. э. в Индии были широко распространены цифры «брахми». В пятом столбце той же таблицы изображены цифры брахми, воспроизводящие надписи в пещере Назик. В отличие от цифр карошты, цифры брахми записывались слева направо, как индийское письмо. Однако в обеих нумерациях было немало общего. Не говоря уже о том, что первые цифры в обоих случаях изображали три палочки, а четвертая — четыре палочки (в случае карошты — в виде креста), общим было то, что до сотни в обоих случаях применялся чисто аддитивный принцип, а начиная с сотен этот принцип соединялся с мультипликативными: в нумерации брахми последний принцип применялся не только к знаку для 100, но и к знаку для 1000.

Следует отметить, что первые три знака в обеих нумерациях совпадают с китайскими; встречалась в Китае и четверка в виде креста. Важным отличием цифр брахми от карошты было (как и в китайских цифрах) наличие специальных знаков для чисел от 1 до 9; возможно, что цифры карошты представляли собой промежуточную стадию между обозначениями чисел от 1 до 9 с помощью повторения знака для 1, применявшимися в Финикии, Вавилоне и Египте, и обозначениями этих чисел с помощью специальных знаков.

Эта особенность цифр брахми стала предпосылкой создания в Индии десятичной позиционной нумерации.

Первая известная нам запись с помощью цифр брахми, в которой применяются только первые девять цифр, а десятки и сотни обозначаются теми же цифрами, что и единицы, относится к VI в. н. э.: это дарственная запись от 595 г. н. э., в которой 346-й год записан цифрами брахми 346. Нуля не было, вместе него на счетной доске оставался пустой столбец.

Наряду с цифровой записью в Индии широко применялась словесная система обозначения чисел, этому способствовал богатый по своему словарному запасу санскритский язык, имеющий много синонимов. При этом ноль обозначался словами «пустое», «небо», «дыра»; единица — предметами, имеющимися только в единственном числе: Луна, Земля; двойка — словами «близнецы», «глаза», «поздри», «губы»; четверка — словами «оканы», «стороны света» и т. д.

Применение позиционного принципа в словесной нумерации, в котором одно и то же слово в зависимости от места имеет разное числовое значение, а названия разрядов опускаются, зафиксировано еще в V в. Например, число 1021 записывалось словами «Луна — дыра — крылья — Луна». Одно из названий нуля — «шунья» (пустое) стало впоследствии основным. Когда в VIII в. индийские сиддханти переводили на арабский язык, слово «шунья» перевели арабским словом «сыфр», имеющим то же значение. Слово «сыфр» при переводе арабских сочинений на латынь было оставлено без перевода в виде *ciffra*, откуда происходит французское и английское название нуля *zero*, немецкое слово *Ziffer* и наше слово «цифра», также первоначально означавшее ноль.

Но в это же время на судьбу нумерации значительное влияние оказали математики. В области вычислений требовались более удобные системы счисления и Арвабхата предложил записывать цифры санскритскими буквами.

Первое достоверное свидетельство о записи нуля относится к 876 г., в настенной надписи из Гвалиора (Индия) имеется число 270. Одни исследователи (Г. Фрейденваль) предполагают, что ноль был заимствован у греков, которые ввели в качестве нуля букву θ в шестидесятиричную систему счисления, употребляемую ими в астрономии. В V в. в Индии появилась переводная греческая астрономическая литература. Освоение ее индийцами, возможно, повлияло и на перемену порядка следования цифр (от старших к младшим, как это было у вавилонян и греков) и на запись дробей, аналогичную их записи в эллинистическом Египте.

Другие (Дж. Нидэм), наоборот, считают, что ноль пришел в Индию с востока, он был изобретен на границе индийской и китайской культур. Обнаружены более ранние надписи от 683 и 686 гг. в нынешних Камбодже и Индонезии, где ноль изображен в виде точки и малого кружка. Те же доводы, что и у Фрейденваль (порядок следования разрядов, запись дробей, переводная литература), могут быть приведены в пользу не греческого, а китайского происхождения нуля.

На основе цифр брахми выработались современные индийские цифры «деванагари» (божественное письмо), применяющиеся в десятичной позиционной системе, от которой происходят десятичные позиционные системы арабов и европейцев.

Первым свидетельством об индийской десятичной позиционной системе являются слова сирийского христианского епископа Севера Себохта, жившего в одном из монастырей в верховьях Евфрата в VII в. В рукописи 662 г. Себохт писал: «Я не стану касаться науки индийцев... их системы счисления, превосходящей все описания. Я хочу лишь сказать, что счет производится с помощью девяти знаков¹».

Мы называем изобретенные индийцами цифры 1, 2, ..., 9 и ноль арабскими, так как заимствовали их у арабов, но сами арабы называли эти цифры индийскими, а арифметику, основанную на десятичной системе — «индийским счетом» (хисаб ал-Хинд).

Арифметические действия

Если наши геометрические курсы в значительной степени восходят к греческой математике, то наша арифметика имеет, несомненно, индийское происхождение. Именно от индийской позиционной нумерации происходит наша нумерация, индийцы же первые разработали правила арифметических действий, основанные на этой нумерации.

К основным арифметическим действиям индийцы относили сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в квадрат и куб и извлечение квадратного и кубического корней.

Вычисления индийцы производили на счетной доске, покрытой песком или пылью, а то и прямо на земле. Поэтому арифметические вычисления иногда назывались «дхули-карма» — работа с пылью. Числа записывались заостренной палочкой. Чтобы хорошо различать цифры, их писали доволь-

¹ F. Nau. Notes d'astronomie syrienne. Journal Asiatique, ser. 6, 1910, v. 16, p. 225.

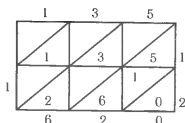


Рис. 49

по крупно, поэтому промежуточные выкладки стирались. Это наложило отпечаток на индийские способы вычисления.

Сложение и вычитание производились как справа налево, т. е. от низших разрядов к высшим, так и слева направо, от высших разрядов к низшим.

Для умножения существовало около десятка способов. При основном способе умножения операцию можно было начинать как с низшего, так и с высшего разряда. В процессе умножения цифры множимого постепенно стирались, а на их месте записывались цифры произведения. Например, чтобы умножить 135 на 12 сначала писали

$$\begin{array}{r} 12 \\ 135 \end{array}$$

Перемножая 5·12 и стирая 5, получали

$$\begin{array}{r} 12 \\ 1360 \end{array}$$

и, сдвигая множитель

$$\begin{array}{r} 12 \\ 1360. \end{array}$$

Перемножая 3·2 и добавляя 6 к 6, стирали 6 и записывали на ее месте 2, а единицу держали в уме или записывали в стороне. Эту единицу прибавляли к произведению 3·1 и сумму 4 писали внизу вместо стертой тройки

$$\begin{array}{r} 12 \\ 1460. \end{array}$$

Далее перемножали 1·2 и прибавляли 2 к 4 внизу, т. е. стирали 4 и на ее месте писали 6. И, наконец, 1·1 = 1, поэтому 1 внизу не стирали. В заключение стирали множитель, и на доске оставалось произведение 1620.

Индийцы применяли и более удобные приемы умножения. Например, расчерчивали счетную доску на сетку прямоугольников, каждый из которых разделен пополам диагональю, по сторонам сетки записывали сомножители, а промежуточные произведения писали в треугольниках и складывали их по диагоналям (рис. 49).

При делении делитель подписывался под делимым так, чтобы первые их цифры находились одна под другой, и из цифр делимого, написанных

над делителем, вычиталось максимальное кратное делителя, не превосходящее числа, образованного этими цифрами. Затем делитель передвигался на один разряд вправо и таким же образом вычитался из цифр остатка.

Существует несколько способов возведения в квадрат и куб. Шридхара в своей «Патиганите» («Искусство вычисления на доске») излагает методы, которые в наших обозначениях можно выразить формулами

$$\begin{aligned}n^2 &= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, & n^3 &= (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\n^2 &= (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab, & n^3 &= (n - 1)^3 + 3n(n - 1) + 1, \\n^2 &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1), & n^3 &= n(n + a)(n - a) + a^2(n - a) + a^3, \\n^2 &= (n - a)(n + a) + a^2, & n^3 &= n + 3n + 5n + \dots + (2n - 1)n.\end{aligned}$$

Первое описание процесса извлечения квадратного и кубического корней встречается в Индии еще в V—VI вв. у Ариабхаты.

Индийцы называли корень «пада» — основание, сторона и «мула» — основание; оба эти слова, по-видимому, перевод греческих слов *βασίς* — основание или *πλευρά* — сторона, применявшихся для обозначения квадратного корня. Так как слово «мула» имеет также значение «корень растения», арабские переводчики индийских сиддханта перевели в VIII в. этот термин арабским словом «джизр», также обозначающим корень растения. Поэтому латинские переводчики в XII в. перевели арабское название корня латинским словом *radix*, откуда и происходят наши термины «корень» и «радикал».

Извлечение квадратного корня в Индии, как и в Китае, основано на разложении квадрата двучлена, но при этом (как и при извлечении кубического корня) не применялся метод Горнера.

Так как при выполнении арифметических действий приходилось стирать промежуточные выкладки, проверить непосредственно, верны ли окончательные результаты, было невозможно. Для проверки умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня индийцы рекомендовали не обратные операции, а так называемую проверку с помощью девятки, основанную на том, что остаток при делении целого числа на 9 равен остатку при делении на 9 суммы цифр этого числа. Первое описание этого правила применительно к умножению, делению с остатком и извлечению квадратного и кубического корней встречается у Ариабхаты II (X в.). Если мы назовем пробой остаток от деления на 9 суммы цифр данного числа, то, например, при умножении двух чисел проба произведения должна быть равна пробе произведения проб множителей. Равенство проб является только необходимым, но не достаточным условием правильности действия, чего индийцы не отмечают. Проверка с помощью девятки применялась математиками стран ислама, познакомившимися с ней по индийским источникам, а от арабов это правило попало к европейцам. Недостаточность этого правила отмечалась Н. Шюке и Л. Пачоли только в конце XV в.

Дроби

В Индии дроби известны очень давно. Еще в середине II тысячелетия до н. э. упоминаются такие дроби ардха ($1/2$), пада ($1/4$), три-пада ($3/4$) и кала ($1/16$).

Индийцы записывали дроби так, как это делается в настоящее время: числитель над знаменателем, только без дробной черты. Друг от друга

дроби отделялись вертикальными и горизонтальными линиями. Так, дробь $\frac{a}{b}$ записывалась $\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right]$, где (как и в дальнейшем) буквы a, b стоят вместо конкретных цифр. Именно об этой записи дробей мы говорили выше, когда упоминали о влиянии на индийскую математику александрийских астрономов первых веков нашей эры и ученых Китая, так как эта запись встречалась и в позднегреческих папирусах и в китайских книгах.

Сложение обозначалось записью дробей рядом. Для обозначения вычитания употреблялись точка или знак $+$ справа, и, например, выражение

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

изображали в виде

$$\left[\begin{array}{c|c|c} a & \dot{+} & e + \\ \hline b & d & f \end{array} \right]$$

В смешанной дроби $a \frac{b}{c}$ целая часть помещалась над дробью:

$$\left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right]$$

Иногда целое число изображали дробью со знаменателем 1. Поэтому смешанную дробь $a \frac{b}{c}$ можно было представить в виде

$$\left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 1 & c \end{array} \right]$$

При умножении дроби записывали рядом:

$$\left[\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline b & d \end{array} \right]$$

а при делении — одну под другой:

$$\left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right] \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right]$$

Как видно, сложение и умножение дробей изображались одинаково. То же относится к делению целого числа a на дробь $\frac{b}{c}$, которое записывали

$$\left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right]$$

так же, как смешанную дробь. О смысле подобного рода записей можно было судить по контексту. Правила действий над дробями почти не отличались от современных. Так, Шридхара приводит правила: «После приведения дробей к общему знаменателю сложи числители», «Произведение дробей равно произведению числителей, деленному на произведение знаменателей», «Квадратный корень [дроби] равен квадратному корню числителя, деленному на квадратный корень знаменателя»¹.

Для приведения к общему знаменателю индийские ученые сначала составляли произведение знаменателей всех сомножителей, а начиная с IX в. пользовались уже их наименьшим кратным. Так поступал, например, Шридхара.

Задачи на пропорции

В индийских сочинениях встречаются многочисленные задачи на простое и сложное тройное правило, пропорциональное деление, правило товарищества, правило смешения, простые и сложные проценты, прогрессии. Одни задачи имели непосредственное практическое значение, другие составлялись для упражнения и развлечения.

При решении задач, которые выражаются уравнением $ax = c$, большое место занимало уже знакомое правило одного ложного положения.

В анонимной рукописи VI—VIII вв., найденной близ селения Бахшали в Северо-Западной Индии (так называемая «Бахшалийская рукопись»), это правило применяется также к задачам, приводящимся к уравнению

$ax + b = c$. Решение имеет вид

$$x = x_1 + \frac{c - cx_1}{a},$$

где $c_1 = ax_1 + b$.

Еще более широкое применение имело тройное правило («трай-рашика» — буквально «три места»), состоящее в нахождении числа x , составляющего с тремя данными числами a , b , c пропорцию

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Это правило было известно еще египтянам и грекам, но индийцы выделили его как специальный арифметический прием и разработали схемы, позволяющие применять его к задачам, содержащим несколько величин, связанных пропорциями. На тройном правиле были основаны индийские правила 5, 7, 9 и т. д. величин (панча-рашика, сапта-рашика, нава-рашика и т. д.). Например, в правиле 5 величин требуется найти величину x по пропорциям

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{y}, \quad \frac{d}{e} = \frac{q}{x},$$

и ответ дается в виде

$$x = \frac{bce}{ad}.$$

Индийцы пользовались также «обратным тройным правилом» (вьяста трай-рашика), когда в задаче вместо прямой пропорциональности указы-

¹ Шридхара. Паттанавита. «Физико-математические науки в странах Востока», 1966, вып. I (IV), стр. 163—164.

вается обратная. Эти правила также были заимствованы у индийцев учеными стран ислама, а через них — европейцами. В странах ислама правила 5, 7, и т. д. величин были обобщены на любое нечетное число. В Европе эти правила, получившие название целых правил, находились в центре внимания авторов арифметических руководств.

Алгебра

Как и в Вавилоне и Китае, в Индии высокого расцвета достигли алгебраические вычисления. Алгебру, вместе с решением целочисленных неопределенных уравнений, индийцы называли «биджаганита» — «искусство вычисления с элементами» или «авьяктаганита» — «искусство вычисления с неизвестными».

Выдающимся достижением индийских математиков было создание развитой алгебраической символики. Эта символика была даже богаче, чем у Диофанта. Впервые появились особые знаки для многих неизвестных величин, свободного члена уравнения, степеней. Большинство символов представляет собой первые слоги соответствующих санскритских терминов.

Неизвестную величину индийцы называли «йават-тават» (столько, сколько), для обозначения неизвестной служила буква, означающая слог «йа». Если неизвестных было несколько, то их называли словами, выражающими различные цвета: калака (черный), пилака (голубой), питана (желтый), панду (белый), лохита (красный), а обозначали первыми слогами соответствующих слов: ка, ни, пи, ла, ло. Свободный член в уравнениях сопровождался первым слогом слова «рупа» (целый). Иногда неизвестная обозначалась знаком нуля, так как первоначально в таблицах, например, пропорциональных величин, для нее оставлялась пустая клетка.

Знаки, представляющие собой обозначения первых слогов слов, применялись для основных действий. Сложение обозначалось знаком «йу» («йта» — сложенный), умножение — «гу» («гунита» — умноженный), деление — «бха» («бхага» — деленный).

Вычитание обозначалось точкой над вычитаемым или знаком $\vdash$ справа от него (например, вычитание 5 обозначалось 5 или $5\vdash$; выше это обозначение встречалось нам при вычитании дробей). Знаки сложения и умножения часто опускались. В качестве примеров приведем записи

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{array} \right| \quad \text{для} \quad \frac{x}{1} + \frac{5}{2}, \\ 0 \ 3 \quad \text{йу} \quad \text{для} \quad \frac{x}{1} + \frac{3}{4}, \\ 1 \ 4 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1\vdash & 1 & 1\vdash & 1 & \\ 2 & 3 & 4 & 6 & \text{бха} \\ \hline & & & & 1 \end{array} \right| \quad \text{для} \quad \frac{36}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right)}.$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 40 & & 13 \\ 1 & \text{бха} & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 13 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right| \quad \text{для} \quad \frac{160}{40} \cdot 13 \frac{1}{2}.$$

Обозначения степеней представляли собой сочетания слогов «ва» («варга» — квадрат), «гха», («гхана» — куб) и слова «гхата» — произведение, т. е. степени и неизвестных обозначались:

$$\begin{aligned}x^2 &= \text{ва}, \\x^3 &= \text{гха}, \\x^4 &= \text{ва ва}, \\x^5 &= \text{ва гха гхата}, \\x^6 &= \text{ва гха}, \\x^7 &= \text{ва ва гха гхата}, \\x^8 &= \text{ва ва ва}, \\x^9 &= \text{гха гха}.\end{aligned}$$

Мы видим, что для степеней, показатели которых имеют вид $2^\alpha, 3^\beta$, обозначения состоят из слога «ва», повторенного α раз, и слога «гха», повторенного β раз. Таким образом, степени этого вида образуются по мультипликативному принципу. Напротив, обозначения степеней, показатель которых не представляется в таком виде, образуются по аддитивному принципу, причем слово «гхата» (произведение) означает, что степень такого типа представляет собой произведение степеней, суммой показателей которых является показатель этой степени (например, $x^6 = x^3 \cdot x^3 = x^3 x^3$). Следовательно, индийская символика принципиально отличается от символика Диофанта, где названия степеней были основаны на чисто аддитивном принципе.

Квадратный корень обозначался слогом «му» — от слова «мула». В качестве примеров приведем записи

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & & 5 & \\ & 1 & \text{йу} & 1 & \text{му} \end{array} \right| \quad \text{означает } \sqrt{11+5},$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 7 & + & \\ & 1 & 1 & & \text{му} \end{array} \right| \quad \text{означает } \sqrt{11-7}.$$

Знака равенства не было: обе части уравнения писали в две строки так, чтобы одинаковые степени стояли друг под другом. Если неизвестная отсутствовала, то записывали ее знак с коэффициентом нуля. Уравнение

$$40x - 8 = x^2 + 1$$

записывается в виде

$$\begin{aligned}\text{йа ва 0 йа 10 ру 8} \\ \text{йа ва 1 йа 0 ру 1 ;}\end{aligned}$$

уравнение

$$8x^3 + 4x^2 + 10y^2x - 4x^3 + 12 y^2x$$

записывается в виде

$$\begin{aligned}\text{йа гха 8 йа ва 4 ка ва йа 10} \\ \text{йа гха 4 йа ва 0 ка ва йа 12.}\end{aligned}$$

Символы применялись и в учении о прогрессиях. Первый член обозначается «а» от «ади» — (первый член), разность арифметической прогрессии — «ча» или «у» от «чайа» или «уттара» (разность прогрессии), число членов — «па» или «га» от «пада» или «гачха» (число членов), сумма прогрессии — «сан» или «ган» от «санкалита» или «ганита» (сумма). Например, в анонимном комментарии к «Патиганите» приводится запись

$$10 \left| \begin{array}{c} a \\ y \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} pa \\ 1/4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} san \\ 0 \end{array} \right|,$$

т. е.

первый член прогрессии	разность прогрессии	число членов	сумма
10	- 2	1/4	x

Итак, индийские ученые сделали большой шаг в создании символической алгебры, хотя их обозначения были громоздки, а сами знаки, т. е. санскритские буквы, имели сложное начертание.

Отрицательные и иррациональные числа

Индийские математики, начиная с Брахмагупты (VII в. н. э.), систематически пользовались отрицательными числами и трактовали положительное число как имущество, а отрицательное — как долг. Брахмагупта приводит все правила арифметических действий над отрицательными числами. Ему еще не была известна двузначность квадратного корня, но уже в 850 г. Магавира в своей книге «Ганита-сара-санграха» («Краткий курс математики») пишет: «Квадрат положительного или отрицательного — числа положительные, их квадратные корни будут соответственно положительными и отрицательными. Так как отрицательное число по своей природе не является квадратом, то оно не имеет квадратного корня»¹. Последние слова Магавиры показывают, что он ставил вопрос и об извлечении корня из отрицательного числа, но пришел к выводу, что эта операция невозможна. Не исключено, что об отрицательных числах индийские ученые узнали в результате контактов с китайской наукой. Прямых свидетельств в пользу такого предположения мы не имеем. Во всяком случае, в Индии отрицательные числа не применялись при решении систем линейных уравнений (мы не находим здесь ничего подобного методу фан-чэн). Индийцы называли положительные числа «джана» или «сва» (имущество), а отрицательные — «рина» или «кшайа» (долг). Впоследствии этот термин мы встретим в этом же значении в странах ислама («дайн» у Абу-л-Вафы) и в Европе (debitum у Леонардо Пизанского).

Индийцы применяли символ квадратного корня «му» не только к полным квадратам, но и к полученным квадратичным иррациональностям. Бхаскара с помощью правил

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

¹ А. И. Володарский. О трактате Магавиры «Краткий курс математики». «Физико-математические науки в странах Востока», 1968, вып. II(V), стр. 98—130.

$$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

заимствованных, быть может, у греков, производил преобразования квадратичных числовых иррациональностей и таким образом упрощал довольно сложные выражения, как, например,

$$\frac{\sqrt{9} + \sqrt{54} + \sqrt{450} + \sqrt{75}}{5 + \sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Возможно, что исходными здесь были преобразования правой части.

Некоторые преобразования, например,

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

могли использоваться для более удобного приближенного извлечения корней.

Такое свободное пользование иррациональностями также было воспринято в странах ислама, где Омар Хайям в XI в. предложил расширить понятие числа до того, что мы называем положительным иррациональным числом.

Линейные уравнения

Задачи, приводящие к решению линейного уравнения с одним неизвестным, имеются у Ариабхаты. К линейному уравнению, в частности, приводит его задача, обобщенная в дальнейшем под названием «задачи о курьерах» мировую алгебраическую литературу, — она приводится и в нынешних школьных руководствах. В этой задаче требуется определить время встречи двух небесных светил по данным скоростям v_1 , v_2 и расстоянию a между ними. Ариабхата сообщает решение

$$t = \frac{a}{v_1 - v_2}$$

при движении в одну сторону; если $v_1 < v_2$, то встреча произошла в прошлом. При движении навстречу необходимо расстояние разделить на сумму скоростей. О случае, когда встреча произошла в прошлом, Ариабхата не упоминает, и мы не знаем, рассматривает ли он этот случай или нет, так же как не знаем, были ли ему известны отрицательные числа. Впрочем, вряд ли он умел истолковать отрицательное значение t , соответствующее $v_1 < v_2$. Индийские математики и позднее не принимали в расчет отрицательные решения уравнений и для этого заменяли подходящим образом условия задач.

Заметим, что «задачи о курьерах» в некоторых более сложных вариантах (например, движение с переменной скоростью, растущей в арифметической прогрессии) приводят к квадратному уравнению, — такой пример есть уже в «Бахмалийской рукописи».

У Магавиры, Бхаскары и других авторов имеются задачи, приводящие к системам линейных уравнений с несколькими неизвестными. Так, одна

из задач Магавиры приводит к системе

$$\begin{cases} 9x + 7y = 407, \\ 7x + 9y = 400. \end{cases}$$

Метод решения, изложенный Магавирой, не отличается от современного метода решения при помощи уравнивания коэффициентов.

Однако дело не ограничивалось столь простыми задачами. Были разработаны правила решения систем вида

$$\sum_k x_k - x_i = c_i \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

(складывая все уравнения почленно, находили $\sum_k x_k$) и других, несколько более общих, например:

$$a_i \sum_k x_k - b_i x_i = c_i \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Разумеется, речь шла всегда о задачах с численными условиями, но правила формулировались в общем виде. Такие задачи встречаются, постепенно усложняясь, у Ариабхаты, Брахмагупты, Магавиры, Нараяны. Но, как мы уже сказали, общего алгоритма вроде метода фан-чэн индийские математики не создали.

Квадратные уравнения

Задачи на квадратные уравнения имеются в «Ведах» и «Шулва-сутре», но с решением их мы впервые встречаемся, по-видимому, у Ариабхаты. Так, задача на сложные проценты приводит к уравнению

$$tx^2 + px = qp.$$

Решение этого уравнения, приведенное Ариабхатой словесно, можно записать в виде

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}}{t}.$$

Подобного рода задачи, так же как «задачи о курьерах», приводились затем многими авторами как в Индии, так и в других странах. С такой задачей начинал раздел квадратных уравнений в своем широко известном учебнике алгебры А. Клеро (1746). К квадратному уравнению приводит также задача на определение числа членов арифметической прогрессии по данным сумме, первому члену и разности.

Немного спустя квадратные уравнения появляются в «Бахмалдийской рукописи». Примерно в это же время большой вклад в решение квадратных уравнений внес Брахмагупта, который сформулировал общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к канонической форме

$$ax^2 + bx = c, \quad a > 0,$$

где коэффициент при неизвестной первой степени b и свободный член c могут принимать и отрицательные значения.

Решение Брахмагуپты такое же, как у Ариабхаты. Шридхара словесно формулирует решение в несколько другом виде:

$$x = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac + b^2} - b.$$

Брахмагупта еще не говорит о двух корнях квадратного уравнения, но Магавира уже знает об этом, что видно из его задачи, в которой требуется найти число павлинов в стае, $\frac{1}{16}$ которой, умноженная на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат $\frac{1}{9}$ остатка вместе с 14 другими павлинами — на дереве тамала. Магавира приводит эту задачу к уравнению

$$\left(\frac{1}{16^2} + \frac{15^2}{9 \cdot 16^2} \right) x^2 + 14 = x$$

и формулирует решение квадратного уравнения вида

$$\frac{l}{m} x^2 - x = -n$$

с помощью правила

$$x = \frac{\frac{m}{l} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{l} - 4n \right) \frac{m}{l}}}{2},$$

говоря, что «квадратный корень можно как прибавлять, так и вычитать»¹. В нашем случае условием задачи удовлетворяет только корень 48, так как корень $\frac{16 \cdot 14}{17}$ дробный.

Бхаскара уже формулирует условие существования двух положительных корней.

Индийцы решали и системы уравнений; например, Бхаскара решал задачу об определении катетов x и y и гипотенузы z прямоугольного треугольника по его периметру и площади, сводящуюся к системе

$$xy = p, \quad x + y + z = q, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Бхаскара рассматривал также специально подобранные уравнения третьей и четвертой степеней, целочисленные корни которых он находил путем несложных преобразований. Так, уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

Бхаскара решает следующим образом: прибавляя к обеим частям $4x^2 + 400x + 1$, он получает

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000.$$

Извлечение корня из обеих частей дает

$$x^2 + 1 = 2x + 100,$$

откуда

$$x = 11.$$

¹ *M. Rangacarya. The Ganita-sara sangraha of Mahaviracarya, IV, 57.*

Неопределенные уравнения

Крупных успехов достигли индийские математики в решении неопределенных уравнений, возникших в связи с календарно-астрономическими задачами, в которых надо было определять периоды повторения одинаковых относительных положений небесных светил с различными временами обращения.

В отличие от Диофанта, искавшего только рациональные решения, индийцы дали способ решения неопределенных уравнений в целых положительных числах. Решение в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными

$$ax + b = cy \quad (1)$$

приводит уже Ариабхата, но более подробно оно изложено в сочинениях Брахмагупты и Бхаскары. Способ решения носит название способа «рассеивания» или «размелычения» и в современных обозначениях состоит в следующем. Если числа a и c взаимно просты и $a > c$, то частное a/c можно разложить в непрерывную дробь $(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n)$. Обозначим подходящую дробь $(q_0, q_1, \dots, q_k)$ через P_k/Q_k . Предпоследняя подходящая дробь P_{n-1}/Q_{n-1} есть $(q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$, а последняя P_n/Q_n совпадает с a/c . Тогда всевозможные решения уравнения (1) выражаются равенствами

$$x = -(-1)^n bQ_{n-1} + Q_n t, \quad y = -(-1)^n bP_{n-1} + P_n t, \quad (2)$$

где t может принимать любые целые значения. В решенном Бхаскарой уравнении

$$100x + 90 = 63y$$

имеем

$$\frac{100}{63} = (1, 1, 1, 2, 2, 1, 3),$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = (1, 1, 1, 2, 2, 1) = \frac{27}{17}$$

и согласно (2)

$$x = 90 \cdot 17 + 63t = 1530 + 63t,$$

$$y = 90 \cdot 27 + 100t = 2430 + 100t,$$

наименьшие целые положительные решения — при $t = -24$:

$$x = 18, \quad y = 30.$$

В другом решении им уравнения

$$60x + 16 = 13y$$

имеем

$$\frac{60}{13} = (4, 1, 1, 1, 1, 2),$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = (4, 1, 1, 1, 1) = \frac{23}{5}$$

и согласно (2)

$$x = -16 \cdot 5 + 13t = -80 + 13t,$$

$$y = -16 \cdot 23 + 60t = -368 + 60t,$$

наименьшие целые положительные решения — при $t = 7$: $x = 11$, $y = 52$.

Вершиной достижений индийских математиков в теории чисел является решение в целых положительных числах общего неопределенного уравнения второй степени с двумя неизвестными:

$$ax^2 + b = y^2 \quad (3)$$

и его важного частного случая

$$ax^2 + 1 = y^2, \quad (4)$$

где a — целое неквадратное число, встречавшееся у греческих математиков. Уравнения (3) и (4) рассматривались Брахмагуптой и Бхаскарой. Последний на примерах изложил метод, называемый в настоящее время циклическим. Метод состоит в том, что прежде всего подбираются числа, связанные равенством

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2,$$

причем добиваются того, чтобы b_1 было возможно меньшим. Числа x_1 и b_1 предполагаются взаимно простыми. Далее составляется линейное уравнение

$$x_1 t + y_1 = b_1 x_2,$$

которое можно решить способом «рассеивания», и берутся такие t и x_2 , чтобы $|t^2 - a|$ было возможно меньшим. Нетрудно проверить, что число

$$\frac{t^2 - a}{b_1} = b_2$$

целое, а выражение $ax_2^2 + b_2$ оказывается целым квадратным числом y_2^2 , т. е. получается новое равенство

$$ax_2^2 + b_2 = y_2^2.$$

Продолжая этот процесс, можно последовательно получить решения цепочки уравнений того же вида, в конце которой находится требуемое равенство

$$ax_k^2 + 1 = y_k^2$$

со свободным членом 1. Уравнение (4) при неквадратном a имеет бесчисленное множество решений, но индийцы обычно ограничивались одним из них. Впрочем, Бхаскара уже располагал правилами, согласно которым по одному решению можно получить другие. Следует отметить, что Бхаскара не доказывал, что число y_2 целое и что применение правила приводит к $b = 1$, но предложенный им метод — замечательное открытие. Уравнением (4) позже занимались Ферма, Эйлер и Лагранж. Метод нахождения полного решения, найденного Лагранжем в 1769 г., близок к индийскому.

В анонимных комментариях к «Патиганите» Шридхары найдено общее рациональное решение уравнения (4) в виде

$$x = \frac{P}{Am - Bn}, \quad y = \frac{An - Bm}{Am - Bn},$$

где числа A, B, m, n, p удовлетворяют условиям

$$A^2 - B^2 = a, \quad m^2 + p^2 = n^2.$$

Из этого решения следуют рациональные решения, данные Брахмагуптой, Шрипати, Бхаскарой и Нарайаной.

Брахмагупта и Бхаскара рассматривали некоторые другие типы неопределенных уравнений, например неопределенное уравнение, содержащее произведение неизвестных

$$ax + by + c = xy.$$

Если выражение $ab + c$ можно представить в виде произведения двух сомножителей mn , то решения имеют вид

$$x = m + b, \quad y = n + a.$$

Заметим, что индийские математики Нарайана (XIV в.) и Ганеша (XVI в.) занимались также составлением магических квадратов.

Теорема Пифагора

Знания и открытия индийских математиков в области геометрии значительно уступают их знаниям и открытиям по арифметике, алгебре, теории чисел. Специальных сочинений по геометрии в Индии не было, геометрические сведения сообщались в арифметических трактатах или в арифметических разделах сочинений по астрономии.

Геометрические предложения приводились без доказательств. Часто все сводилось к чертежу со словом «смотри», который в редких случаях сопровождался краткие указания. По-видимому, доказательства сообщались учащимся устно. В геометрических задачах вопрос сводился к вычислению и никогда — к построению. Однако многими видами построений индийцы владели и пользовались в строительном деле.

Наиболее ранние сведения о познаниях индийцев в области геометрии находим в «Шулва-сутре» (VII—V вв. до н. э.), служившем руководством при постройке алтарей и храмов.

Постройка храмов подчинялась ряду правил: они ориентировались по странам света; в основании храма лежали определенные фигуры. Все это требовало решения геометрических задач: построения прямого угла, квадрата, прямоугольных треугольников, стороны которых выражаются целыми числами, построения квадрата, равновеликого прямоугольнику, построения квадрата, площадь которого кратна площади данного квадрата. Отправной точкой многих построений служила теорема Пифагора: с помощью пифагоровых треугольников строились прямые углы и производилось построение квадрата с кратной площадью. Для удвоения квадрата за сторону искомого квадрата брались диагональ исходного, для построения квадрата, равновеликого двум данным квадратам, в большем квадрате строили меньший квадрат и соединяли их вершины так, как показано на рис. 50; проведенная линия является гипотенузой треугольника, катеты которого равны сторонам данных квадратов.

Доказательство теоремы Пифагора приводятся в «Венце знания» Бхаскары в виде чертежа (рис. 51) с надписью «смотри». Если мы обозначим катеты прямоугольного треугольника, построенного на каждой из сторон



Рис. 50

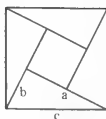


Рис. 51

квадрата чертежа Бхаскары, через a и b , а гипотенузу этого треугольника, равную стороне квадрата, через c , то площадь c^2 квадрата равна четырем площадям прямоугольного треугольника, т. е.

$$4 \frac{ab}{2} = 2ab,$$

и площади квадрата, построенного на разности катетов треугольника, т. е. $a - b$, откуда, упрощая, получим соотношение

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Это доказательство несколько проще аналогичного китайского доказательства (ср. рис. 46).

Площади и объемы

Сведения по геометрии имеются также в трактатах Брахмагупты, Магавиры, Шридхары, Бхаскары.

Брахмагупта приводит приближенное правило для вычисления площади произвольного четырехугольника как произведения полусумм противоположных сторон, с которым мы встретились в математике египтян и вавилонян.

Шридхара указывал, что это правило нельзя применять ко всем четырехугольникам. Он сообщает точное правило вычисления площади трапеции.

Брахмагупта для нахождения площади четырехугольника пользовался правилом, аналогичным правилу Архимеда — Герона для площади треугольника:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a , b , c и d — стороны четырехугольника, а p — полупериметр. Это правило верно только для четырехугольников, вписанных в круг. Брахмагупта не оговаривает этого, но фактически рассматривает лишь два типа четырехугольников — равнобедренные трапеции и четырехугольники с пересекающимися под прямым углом диагоналями, для которых правило справедливо.

Как уже упоминалось, геометрические доказательства крайне лаконичны, но нередко весьма наглядны. Так, для обоснования правила вычисления площади треугольника приводится рисунок, в котором высота прямоугольника равна половине высоты треугольника (рис. 52). Для обоснования предложения «Площадь круга равна площади прямоугольника,



Рис. 52

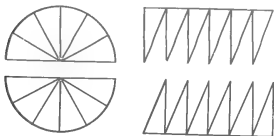


Рис. 53

стороны которого соответственно равны полуокружности и радиусу» Ганеша (XVI в.) делит круг на 12 равных секторов, а затем разворачивает каждый полукруг, состоящий из 6 секторов, в пилообразную фигуру, основание которой равно полуокружности, а высота — радиусу (рис. 53). Прямоугольник, о котором говорится в условии, получится при вставлении зубьев одной из «пил» в зазоры между зубьями другой. По-видимому, читатель должен был представить себе, что круг разделен не на 12, а на столь большое число секторов, что эти секторы станут неотличимы от треугольников, составляющих «пилы». В обоих случаях, как и при доказательстве Бхаскарой теоремы Пифагора, доказательство состояло из чертежей и слова «смотри».

Приближенные выражения отношения длины окружности к диаметру мы находим уже в сиддхантах. В «Пулисе-сиддханте» (V в. н. э.) говорится, что длина окружности относится к диаметру, как 3927 к 1250, что соответствует значению $\pi = 3,1416$. То же значение π в виде $\frac{62832}{20000}$ мы

находим у Ариабхаты. Брахмагупта пользовался приближением $\pi = \sqrt{10}$, возможно, китайского происхождения. Встречается у индийцев и приближение $\pi = 22/7$. В сиддхантах, как и у александрийских астрономов, окружность делится на 360 градусов, каждый градус — на 60 минут, но радиус делится не на 60 частей, а на 3438 минут. Это объясняется тем, что, если считать окружность равной 360.60 = 21 600 минутам, а $\pi = 3,1416$, то из соотношения $C = 2\pi r$, мы найдем, что $r = 3437,7$ минут. Как мы видим, индийцы измеряли радиус в долях окружности уже в V в., поэтому возможно, что приведенная выше «теорема Ганешы» была известна индийцам задолго до Ганешы. Возможно также, что в чертеже Ганешы предполагалось, что круг разделен на 3438 секторов.

Шридхара приводит правила вычисления объема призмы $V = SH$, объема усеченного кругового конуса

$$V = \frac{\pi H}{3} [R^2 + rR + r^2], \quad \text{где } \pi = \sqrt{10},$$

и объема кругового конуса $V = \frac{1}{3} SH$.

Бхаскара дает правило вычисления объема шара

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \text{где } \pi = 3,1416.$$

Тригонометрия

Уже древнейшая из сиддхانت «Пулиса-сиддханта» познакомила индийцев с тригонометрией хорд александрийских астрономов. Если греки называли хорды «прямыми в круге», то индийцы стали называть их словом «джива», буквально — «тетива», а перпендикуляр, опущенный из середины дуги на середину стягивающей ее хорды — «стрелой». Варахамихира в «Панча-сиддхантике» («Пять сиддхант») заменил хорду полухордой, т. е. линией синуса.

Первоначально она называлась «ардха-джива» — полутетива, затем слово «ардха» было отброшено и линию синуса стали называть просто «джива». Отсюда и происходит наше слово «синус»: арабские переводчики сиддханта не перевели слово «джива» арабским словом «ватар», обозначающим тетиву и хорду, а транскрибировали арабскими буквами и стали называть линию синуса «джиба». Так как в арабском языке краткие гласные не обозначаются, а долгое «и» в слове «джиба» обозначается так же, как полугласная «й», арабы стали произносить название линии синуса «джайб», что буквально означает «впадина», «пазуха». При переводе арабских сочинений на латынь европейские переводчики перевели слово «джайб» латинским словом *sinus*, имеющим то же значение.

Для вычислений замена хорд синусами несущественна, так как хорда дуги α равна удвоенному синусу дуги 2α . Но эта замена позволяет вводить различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника.

Кроме линии синуса, индийцы пользовались линией косинуса (коти-джива) и линией синуса-версуса, т. е. разностью между радиусом и линией косинуса (эту линию они называли «уткрамаджива»). На рис. 54 изображена хорда AB дуги AB и линии синуса AC , косинуса OC и синуса-версуса CD дуги AD . Индийцы рассматривали тригонометрические величины только для дуг первой четверти. В «Панча-сиддхантике» приводятся простейшие соотношения между синусом и синусом-версусом, выражаемые нашими формулами

$$\sin^2 \alpha + \sin \text{vers}^2 \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \text{vers} \alpha}{2},$$

которые позволяли ему находить синус половинной дуги. Индийцы пользовались также соотношениями, выражаемыми нашими формулами

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \sin \alpha &= \cos (90^\circ - \alpha), \\ \sin (\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

В «Сурья-сиддханте» и у Ариабхаты приводятся таблицы синусов через $3^\circ 45'$. Приведем начало и конец этой таблицы.

Дуга		Синус		Дуга		Синус	
в градусах и минутах	в минутах	в минутах	в минутах	в градусах и минутах	в минутах	в минутах	в минутах
3° 45'	225	225		78 45	4725	3372	
7 30	450	449		82 30	4950	3409	
11 15	675	674		86 15	5175	3431	
15 00	900	890		90 00	5400	3438	
...	...	...					

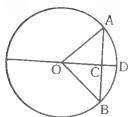


Рис. 54

Таблица синусов в большей части верна до последнего знака, в 10 случаях из 24 ошибка в последнем знаке равна 1, если придерживаться наших правил округления.

У последующих ученых таблицы более точны. В частности, в «Венце знания» Бхаскары приведены таблицы синусов через 1° .

Бхаскара приводит правило для вычисления хорды l по длине окружности C , дуге S и диаметру d

$$l = \frac{4dS(C-S)}{\frac{5}{4}C^2 - S(C-S)}.$$

Это правило, по утверждению самого автора, недостаточно для более точных вычислений. Если $S = C/n$, правило примет вид

$$l = \frac{4(n-1)d}{\frac{5}{4}n^2 - n + 1}.$$

При $n = 3, 4$ для l получаются значения, верные до сотых, при $n = 6$ имеем точное значение.

Индийцы пользовались также тенью, отбрасываемой вертикальным шестом — гномоном, для определения высот и расстояний. Эти вычисления впоследствии привели математиков стран ислама к тангенсам и котангенсам, которые они называли «теньями».

Линии синуса, косинуса, синуса-версуса, а также тени применялись в сиддхантах для решения астрономических задач. В частности, в «Панча-сиддханتي» Варахамхиры решается задача об определении высоты h Солнца над горизонтом по широте φ местности, склонению δ Солнца и его часовому углу t . Другими словами, речь идет об определении одной из сторон сферического треугольника PZS на небесной сфере (рис. 55), вершинами которого являются полюс мира P , зенит Z и Солнце S , по двум другим сторонам и противолежащему углу. Стороны PZ , PS и ZS этого треугольника соответственно равны $90^\circ - \varphi$, $90^\circ - \delta$ и $90^\circ - h$, а угол ZPS равен t . Правило Варахамхиры в наших обозначениях имеет вид

$$\sin h = (\sin \text{vers } t_0 - \sin \text{vers } t) \cos \varphi \cos \delta,$$

где t_0 — угол ZPA , связанный с φ и δ , как показано в другом предложении «Панча-сиддхантки», соотношением

$$\sin \text{vers } t_0 = 1 + \text{tg } \varphi \text{ tg } \delta.$$

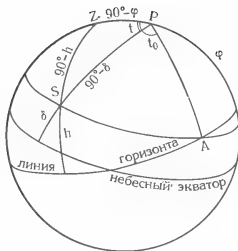


Рис. 55

Поэтому правило Варахамиры можно переписывать в виде

$$\sin h = (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta - 1 + \cos t) \cos \varphi \cos \delta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

т. е., полагая $90^\circ - h = a$, $90^\circ - \delta = b$, $90^\circ - \varphi = c$, $t = A$, в виде сферической теоремы косинусов

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Бесконечные ряды

Суммирование числовых рядов интересовало многих индийских математиков. Отдельные примеры арифметических и геометрических прогрессий имеются еще в «Ведах». Ариабхата приводит правила суммирования рядов треугольных чисел, натуральных квадратов и кубов, а Магавира — правила суммирования геометрической прогрессии и таких рядов, как ряды квадратов и кубов членов арифметической прогрессии. В XVI в. Нарайана произвел еще более общие суммирования: если обозначить

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= S_n^{(1)}, \\ S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + \dots + S_n^{(1)} &= S_n^{(2)}, \\ S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + \dots + S_n^{(2)} &= S_n^{(3)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

то можно сказать, что Нарайана привел выражение для

$$S_n^{(m)} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)}.$$

Нарайана обобщил это правило на случай арифметической прогрессии с данным первым членом a_1 и разностью d : в этом случае сумма равна

$$\sum_n^{(m)} = a_1 \frac{m+1}{n-1} S_{n-1}^{(m)} + d S_{n-1}^{(m)}.$$

Это правило Нараяна применил к задаче о приплоде коровы при условии, что корова рождает одну телку в начале каждого года, а телки дают такое же потомство по достижении трех лет.

Наиболее замечательных успехов в области бесконечных рядов достигли южноиндийские математики в XVI в. Поводом к их исследованиям послужили, по-видимому, поиски приемов более точного вычисления числа π . Нилаканта приводит словесно, без доказательств, разложения дуги, равной четверти окружности, в виде бесконечных числовых рядов, получающихся из общего степенного ряда арктангенса.

Общее разложение в наших обозначениях имеет вид

$$r\varphi = \frac{r \sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{r \sin^3 \varphi}{3 \cos^3 \varphi} + \frac{r \sin^5 \varphi}{5 \cos^5 \varphi} - \dots \quad (1)$$

При $r = 1$ и $\varphi = 45^\circ$ получаем ряд для вычисления π , причем $\pi/4$ выражается частичной суммой S_n и поправкой k_n

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + k_n;$$

поправка k_n дается в трех видах:

$$k_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{4n}, \quad k_n^{(2)} = \frac{(-1)^n n}{4n^2 + 1}, \quad k_n^{(3)} = \frac{(-1)^n (n^2 + 1)}{n (4n^2 + 5)}.$$

Легко заметить, что

$$|k_n^{(1)}| > |k_n^{(3)}| > |k_n^{(2)}|.$$

Эти поправки даже при небольших n значительно улучшают приближения. Значение числа π , данное Нилакантой, имеет десять верных знаков.

В анонимном трактате «Каранападдхати» («Техника вычислений»), также написанном в Южной Индии в XV—XVI вв., приводятся не менее замечательные правила разложения синуса и косинуса в бесконечные степенные ряды:

$$r \sin \varphi = S - \frac{S^3}{3! r^2} + \frac{S^5}{5! r^4} - \dots,$$

$$r \cos \varphi = r - \frac{S^2}{2! r} + \frac{S^4}{4! r^3} - \dots,$$

а также приближенные формулы для синуса и арксинуса:

$$r \sin \varphi \approx S - \frac{S^3}{6r^2}$$

$$r\varphi \approx r \sin \varphi + \frac{r^3 \sin^3 \varphi}{6r^2}.$$

Методы, которыми были получены результаты Нилаканты и неизвестного автора, изложены в также анонимном трактате «Йукти бхаша» («Разъяснение математики»), написанном, как упоминалось, в XVII в. на языке малайялам. Ряд арктангенса (1) был получен следующим образом: прежде всего из элементарно-геометрических соображений находилась связь между малой дугой (в наших обозначениях $\Delta\varphi$) и соответствующим приращением тангенса (в наших обозначениях $\Delta \operatorname{tg} \varphi$) в виде $\Delta\varphi = \frac{\Delta \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$. Далее отрезок линии тангенса $t = \operatorname{tg} \varphi$ делился на n равных

частей, в каждой из которых применялось указанное равенство, а затем суммированием получалось приближенное выражение для $\varphi = \operatorname{arctg} t$ в виде суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{t}{n}}{1 + \left(\frac{kt}{n}\right)^2}. \quad (2)$$

Деление под знаком суммы производилось с помощью повторного применения тождества

$$\frac{b}{c} = 1 - \frac{c-b}{b} \frac{b}{c},$$

которое при $b < c$ приводит к ряду

$$\frac{b}{c} = 1 - \frac{c-b}{b} + \frac{(c-b)^2}{b^2} - \dots - (-1)^{m-1} \frac{(c-b)^m}{b^m} + \dots$$

Поэтому, полагая $b = 1$, $c = 1 + (kt/n)^2$, указанную сумму можно переписать в виде ряда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{n} \left[1 - \left(\frac{kt}{n}\right)^2 + \left(\frac{kt}{n}\right)^4 - \dots + (-1)^{m-1} \left(\frac{kt}{n}\right)^{2m-2} + \dots \right].$$

Далее производился предельный переход

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

полученный, по-видимому, индуктивно из известных ранее правил суммирования степеней натуральных чисел. Применение этого перехода к указанному ряду и приводило к ряду (1).

Мы видим, что южноиндийские ученые предвосхищали многие результаты, которые были вновь получены в Европе в XVII — XVIII вв. Так, ряд арктангенса (1) был вновь найден Дж. Грегори в 1671 г. и Г. В. Лейбницем в 1673 г. Соотношением (2) пользовался в 1739 г. Л. Эйлер для разложения числа π . Ряды для синуса, косинуса и арксинуса были выведены И. Ньютоном около 1666 г.

Индийцы предвосхищали не только конечные результаты, но отчасти и методы, приводящие к ним. Так, в современных учебниках по математическому анализу ряд арктангенса выводят часто по способу, сходному с индийским: в равенстве

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

подынтегральную функцию раскладывают в степенной¹ ряд и затем почленно интегрируют.

Значение математики Индии

Индийская математика оказала огромное влияние на развитие математики как на Востоке, так и на Западе. Именно в Индии была разработана наша арифметика, основанная на десятичной позиционной нумерации, а также такие арифметические правила, как тройное правило и его обобщения. Наши термины «корень» и «синус» постоянно напоминают нам о роли индийских ученых в разработке алгебры и тригонометрии. Оказали влияние на Европу и их теоретико-числовые исследования. В значительной степени индийцам обязаны мы и введением отрицательных и иррациональных чисел. К сожалению, математические и астрономические труды индийцев, написанные в XV—XVII вв., и в частности такое замечательное открытие, как бесконечные ряды для арктангенса, синуса и косинуса, остались в свое время неизвестными за пределами Индии и были получены вновь европейцами.

Несомненно, что вклад индийцев в развитие мировой математики был бы во много раз больше, если бы Индия не попала на несколько столетий под колониальное иго. Об этом свидетельствует деятельность замечательного индийского математика Сринивасы Рамануджана (1887—1920), который в весьма трудных условиях смог стать одним из крупнейших специалистов по теории чисел.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА

СТРАНЫ ИСЛАМА

Арабский халифат

В VII в. в Аравии возникла новая религия — ислам (буквально — «покорность»), основанная Мухаммедом (Магометом). Новая религия, приверженцы которой называются мусульманами (от слова «муслим» — покорный), впитала традиции старых монотеистических религий — иудейства и христианства — и распространилась прежде всего в низах арабского общества в противовес многобожию правящих слоев Аравии. Мухаммед был объявлен пророком, шестым после Адама, Ноя, Авраама, Моисея и Иисуса. За начало мусульманской эры считается время бегства (по-арабски «хиджра») Мухаммеда из Мекки в Медину (622 г.). Мухаммед вернулся в 630 г. в Мекку победителем и умер в 632 г. Его преемники — халифы, распространяя ислам огнем и мечом, завоевали в 637 г. Сирию, Месопотамию и Иран, в 642 г. — Египет, во второй половине VII в. — всю Северную Африку. Население Сирии, Месопотамии и Египта, угнетавшееся византийцами, не оказало завоевателям сопротивления и приняло ислам. Впоследствии в этих странах и всей Северной Африке сложились нации, говорящие на арабском языке и считающие себя арабами. Христианское население этих стран в большинстве случаев также арабизировалось (иногда древний язык сохранялся в виде религиозного языка христиан). В 711 г. арабы переправились из Африки в Испанию и вскоре захватили почти весь Пиренейский полуостров, а в IX в. — и Сицилию, и юг Италии. В 712 г. началось завоевание Средней Азии, вскоре были покорены часть Закавказья и часть Индии. Арабские государства на юге Италии просуществовали около двух столетий. В X в. началось постепенное изгнание арабов из Испании, закончившееся только в XV в. Иначе сложилось положение на Востоке: ислам вытеснил зороастризм — прежнюю религию Ирана, Средней Азии и Азербайджана, хотя в некоторых из этих стран и принял новую форму (шиизм, в отличие от правоверного суннизма).

При династии Омейядов столица халифата находилась в Дамаске (Сирия), в 762 г. второй халиф новой династии Аббасидов перенес ее в Багдад, основанный им недалеко от развалин Вавилона.

Образование халифата совпало с распадом рабовладельческой формации на его территории и становлением феодального строя. Правители Багдада уделяли значительное внимание земледелию, и, следовательно, ирригации. В Багдаде и других городах велось большое строительство, росла торговля. Арабские купцы торговали с Византией и Русью, Индией и Китаем, европейским Средиземноморьем и Африкой; в I главе I части мы говорили об арабском влиянии на образование числительных на языке суахили народов Восточной Африки (кстати сказать, само слово «суахили» происходит от арабского названия побережья Африки «савахил» — берега). Нужды ирригации, строительства и сухопутной и

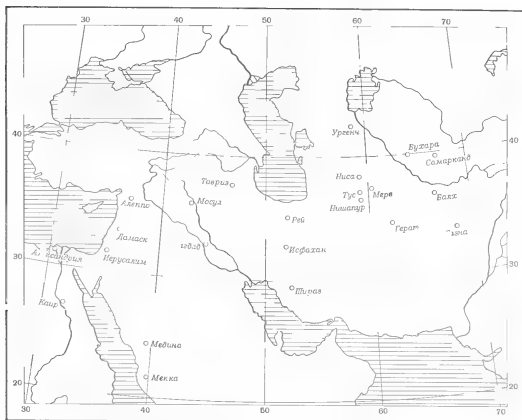
морской торговли требовали развития математики и тесно связанной с ней астрономии. В завоеванных государствах арабы застали более высокую культуру, и багдадские халифы стали приглашать в Багдад виднейших ученых из покоренных стран. Большинство ученых, работавших в Багдаде в IX — X вв., были уроженцами Средней Азии (ал-Хорезми из Хорезма, ал-Марвази из Мерва, ал-Фаргани из Ферганы) или принадлежали к сабиям — потомкам вавилонских жрецов-звездопоклонников, в течение столетий культивировавших занятия астрономией (Сабит ибн Корра и его внук Ибрахим ибн Синан, ал-Баттани).

К X в. завоеванные страны, сохраняя религиозное подчинение Багдаду, становятся фактически независимыми. В X в. Хорасан (нынешняя Туркмения и часть Ирана, населенная туркменами) и междуречье Амударьи и Сырдарьи, получившее теперь название Мавераннахр (ма вара-ан-нахр — «за рекой»), объединяются державой Саманидов со столицей в Бухаре, Хорезм (ныне Хорезмская область Узбекистана, север Туркмении и Каракалпакия) приобретает независимость, центральный Иран и Месопотамия входят в государство Буидов. В это время возникают новые научные центры в Бухаре и Хорезме, где воспитались такие знаменитые ученые, как Ибн Сина (Авиценна) и ал-Бируни. В X в. Буиды подчиняют себе багдадских халифов, а в Северной Африке и Испании образуются независимые халифаты со столицами в Каире и Кордове, которые также становятся научными центрами. В Каире работает Абу Камил ал-Мисри (Миср — арабское название Египта), а затем туда приглашается крупнейший физик и астроном средневековья уроженец Басры ал-Хасан ибн ал-Хайсам (Альхазен).

В X в. Мавераннахр завоевывают турки-илекханы, а центральный Иран, Хорасан и Хорезм — Махмуд Газневи, выходец из тюркской гвардии, основавший огромную империю со столицей в Газне (Афганистан). При Махмуде в Газне работали ученые покоренных им стран. Крупнейшим из этих ученых был ал-Бируни.

В XI в. Среднюю Азию, Иран, Сирию и Месопотамию завоевывают турки-сельджуки, а в XIII в. — монголы. Сельджуки, так же как и Буиды, подчиняют себе багдадского халифа, а монголы убивают последнего халифа и ликвидируют багдадский халифат. В столицах завоевателей также организуются новые научные центры: крупнейший ученый второй половины XI в. Омар Хайям работает в столице Сельджуков Исфахане (Иран), крупнейший ученый XIII в. Насир ад-Дин ат-Туси работает в Мараге (Азербайджан) — столице внука Чингисхана Хулагу. Создание новых научных центров свидетельствует о том, что государства средневекового Востока уже не могли существовать без развития науки, а также об исключительной преданности науке и организационных способностях ученых, которые смогли создать научные школы в условиях страшных разрушений и массовых убийств, которыми сопровождалась все эти завоевания.

В XV в. Среднюю Азию, Иран и ряд сопредельных стран завоевывают войска Тимура. Это также приводит к организации в столице Тимура Самарканде нового научного центра, возглавляемого внуком Тимура султаном Улутбеком. В это время в Самаркандской обсерватории Улутбека работает Гияс ад-Дин ал-Каши. После убийства Улутбека религиозными фанатиками, считавшими его еретиком, и разгрома самаркандского научного центра Али Куши, ученик Улутбека и ал-Каши, переезжает в Константинополь, где вступает в контакт с византийскими учеными. Другие



Страны Ближнего и Среднего Востока

самаркандские ученые попадают в Индию, где традиции их школы развивались в течение нескольких столетий, в частности, Савай Джай Сингхом.

Наряду с математическими центрами в Месопотамии и Сирии, Египте, Средней Азии и Иране исследования велись также в мавританских государствах на северо-западном побережье Африки и Пиренейского полуострова. Менее значительная по богатству открытий наука этих стран, так же, как, например, Сицилии, сыграла большую роль в распространении математико-астрономических знаний в средневековой Европе.

Научные труды математиков стран ислама большей частью написаны на арабском языке. Даже Омар Хайям, известный персидский поэт, писал научные трактаты по-арабски. Однако у Сабита ибн Корры имеется несколько сочинений на родном сирийском языке, а популярная «Книга вразумления в начатках искусства звездочетства» ал-Бируни написана в двух вариантах — по-арабски и по-персидски. То же относится к краткой энциклопедии Ибн Сины: ее арабский вариант называется «Книга спасения», а персидский — «Книга знания». На персидском языке написаны некоторые сочинения Насир ад-Дина ат-Туси, в частности его астрономические таблицы, а его ученик Кутб ад-Дин аш-Ширази уже дал изложения «Начал» Евклида, «Алмагеста» Птолемея и «Оптики» Ибн ал-Хайсама на персидском языке. По-персидски были написаны и астрономические таблицы Улугбека и ряд сочинений ученых самаркандской школы.

В VIII — X вв., в первый период развития математики стран ислама, на арабский язык были переведены индийские «сиддханты», получившие в переводе название «Синдхинд» (Хинд — арабское название Индии), «Начала» Евклида, «Измерение круга», «О шаре и цилиндре» Архимеда, «Копнические сечения» Аполлония, «Сферика» Феодосия, «Сферика» Менелая, «Алмагест» Птолемея, «Арифметики» Диофанта и ряд других сочинений. Были переведены и основные философские сочинения Аристотеля, также явившиеся источником ознакомления с достижениями греческой науки. Наряду с этим в формировании математики в странах ислама большую роль сыграли местные традиции, веками складывавшиеся на территориях Египта, Сирии и Месопотамии, Средней Азии и Ирана, а также связи с Индией и далеким Китаем. Первоначально, естественно, преобладало усвоение культурного наследия прошлого, но очень быстро сложилась своеобразная собственная математическая культура. Среди других течений математической мысли Востока арабская математика выделяется глубоким синтезом устремлений, направленных на решение задач практической жизни и ведущей науки той эпохи — астрономии, с интенсивной

Главный инструмент обсерватории Улугбека в Самарканде



работой теоретической мысли, воспитанной на лучших греческих образцах. Последнее позволило поднять на весьма высокий уровень научную разработку вычислительно-алгоритмических проблем и методов, стоявших на первом плане во всей восточной математике, но развивавшихся в Индии и Китае менее мощными и менее строгими средствами. Эта тенденция, характерная уже для арабской математики IX в., усиливалась вплоть до XV столетия. Ее плодом явилось значительное развитие арифметики в широком смысле слова, от решения задач коммерческого характера до теории отношений и учения о действительном числе, геометрии, в частности, столь важной для дальнейшего прогресса точных наук теории параллельных, а особенно алгебры и тригонометрии, которые впервые формируются здесь в большие самостоятельные науки. Некоторое развитие получили и инфинитезимальные методы.

Арабские нумерации

В странах ислама были распространены два типа нумерации: буквенная, аналогичная древнесемитическим нумерациям, и десятичная позиционная, заимствованная у индийцев.

Буквенную нумерацию арабы называли «абджад» (по первым четырем буквам: алиф, ба, джим, дал) и «джумал» («суммы», так как числовое значение каждого слова равно сумме числовых значений входящих в него букв). Числовые значения букв соответствуют не современному порядку букв алфавита, сложившемуся ко времени хиджры, а древнему, совпадающему с порядком соответствующих букв древнесемитических алфавитов. Однако если в этих алфавитах было всего 22 буквы, то арабы добавили еще 6 букв, которые также получили числовые значения. Поэтому в буквенной арабской нумерации имеются специальные знаки для 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90, 100, 200, ..., 900, 1000. Буквенная арабская нумерация близка к греческой, но о том, что она восходит не к греческой, а к древнесемитическим, говорит то, что у арабов буквы «сад», «ра», «шин», «та», соответствующие финикийским и еврейским буквам «саде», «реш», «шин», «тав», имеют те же числовые значения 100, 200, 300, 400, а не значения 900, 100, 200, 300 соответственных греческих букв «сампи», «ро», «сигма», «тау» (см. таблицу на стр. 63).

Введение десятичной позиционной нумерации было одной из важнейших заслуг багдадской школы. Эта нумерация появляется впервые в книге Мухаммада ал-Хорезми (787 — ок. 850) «Об индийском счете», где он пишет: «Когда увидел я, что индийцы составляли из девяти букв любое свое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно богу, что получается из этих букв, для облегчения изучающему»...¹

Далее ал-Хорезми описывает девять индийских цифр и «маленький кружок, наподобие о», чтобы по нему знали, что разряд... пуст»². Мы уже упоминали, что нуль называется по-арабски «сыфр» — пустой (см. стр. 182—183).

¹ Мухаммад ал-Хорезми. Математические трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда и Ю. Х. Копелевича. Ташкент, 1964, стр. 9.

² Там же, стр. 10.

В западных странах ислама «индийские цифры» приняли несколько другую форму, называемую «губар» (пыль). Такое название указывает, что эти цифры применялись при вычислениях на счетной доске, покрытой пылью.

На рис. 56 изображена таблица первых десяти степеней чисел от 1 до 10 и таблица извлечения корня пятой степени в восточноарабских («индийских») цифрах из рукописи «Ключа арифметики» ал-Каши (XV в., см. стр. 214). На рис. 57 приведена из той же рукописи таблица извлечения кубического корня в шестидесятиричной системе, в которой числа от 1 до 59 изображаются в буквенной арабской нумерации.

Арабские купцы часто записывали числа словами. Из словесной записи чисел впоследствии выработалась применяющаяся до сих пор торговцами многих стран Востока числовая скоропись — сийак.

Рис. 56

The image contains two tables from an Arabic manuscript. The left table (Fig. 56) shows the first ten powers of numbers 1 through 10. The right table shows the extraction of the fifth root in the Eastern Arabic numeral system.

Left Table (Powers of Numbers):

База	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
3	1	6	27	64	125	216	343	512	729	1000
4	1	8	36	128	324	729	1296	2048	2916	4000
5	1	10	45	180	625	1756	4096	8100	12167	15625
6	1	12	54	256	1000	2799	6553	12996	22023	32768
7	1	14	63	312	1323	3706	9261	18519	32067	47056
8	1	16	72	384	1728	4913	12167	24136	41664	58320
9	1	18	81	468	2025	5832	13824	27993	47829	65610
10	1	20	90	560	2500	6912	16384	32805	53144	72900

Right Table (Fifth Root Extraction):

База	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
3	1	6	27	64	125	216	343	512	729	1000
4	1	8	36	128	324	729	1296	2048	2916	4000
5	1	10	45	180	625	1756	4096	8100	12167	15625
6	1	12	54	256	1000	2799	6553	12996	22023	32768
7	1	14	63	312	1323	3706	9261	18519	32067	47056
8	1	16	72	384	1728	4913	12167	24136	41664	58320
9	1	18	81	468	2025	5832	13824	27993	47829	65610
10	1	20	90	560	2500	6912	16384	32805	53144	72900

Арифметические действия

Первое руководство по арифметике, основанное на позиционном принципе, было написано в первой трети IX в. Мухаммадом ал-Хорезми. Сведений о жизни этого ученого сохранилось крайне мало. Имя ал-Хорезми указывает на его родину — среднеазиатское государство Хорезм, а одно из прозвищ ученого — ал-Маджуси — говорит о его происхождении из зороастрийских жрецов — магов (по-арабски «маджус»). Зороастрийское духовенство было основным носителем культуры и науки Ирана и Средней Азии до арабского завоевания, и происхождение ал-Хорезми из семьи магов позволяет судить о корнях его знаний. Впрочем, сочинения ал-Хорезми показывают, что он был хорошо знаком и с наукой Индии и с наукой эллинистических стран Ближнего Востока. Кроме арифмети-

Рис. 57

[illegible]

ческого трактата ал-Хорезми сохранились его трактат по алгебре, содержащий также главу по геометрии, астрономические таблицы, включающие раздел, посвященный тригонометрии, таблицы широт и долгот городов, составленные не ранее 836 г., и трактат о календаре. При халифе ал-Ма'муне (813—833) ал-Хорезми возглавил в Багдаде библиотеку «Дома мудрости», своего рода академии; ал-Ма'муну были посвящены алгебраический трактат и астрономические таблицы ал-Хорезми. При халифе ал-Васике (842—847) ал-Хорезми возглавлял экспедицию к хазарам; к 847 г. относится последнее упоминание об ал-Хорезми. Арабский текст арифметического трактата не сохранился, и мы знаем этот труд только по латинскому переводу XII в. в неполной копии XIII в., а также по некоторым примыкающим к нему латинским сочинениям того же времени и несколько более ранним арабским учебникам — Кушьяра ибн Лаббана, ан-Насави и другим.

Ал-Хорезми подробно описывает сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня с помощью индийских цифр. В число арифметических действий он включает удвоение и раздвоение, выделяемые им вследствие их применения при извлечении квадратного корня. Действия производились на доске, покрытой песком или пылью, и на каждом этапе выкладки использованные цифры стирались и заменялись новыми. Эта индийская процедура, непригодная при письме на бумаге, сохранялась долгое время. Для примера укажем в современных обозначениях основные этапы умножения $2326 \cdot 214 = 497\,764$ (множитель, после умножения на каждую его цифру, сдвигается на одно место вправо).

$$\begin{array}{r} 2326 \quad 428 \quad 326 \quad 492 \quad 2 \quad 26 \quad 496486 \quad 497764 \\ 214 \quad \quad 214 \quad \quad 214 \quad \quad 214 \end{array}$$

За действиями над целыми следуют операции над шестидесятиричными и обыкновенными дробями и, наконец, извлечение квадратных корней (эти два последних отдела отсутствуют в упомянутой копии латинского перевода).

Руководство ал-Хорезми сыграло очень большую роль в развитии арифметики. Имя автора в латинизированной форме *Algorismus* и *Algorithmus* стало в средневековой Европе обозначать всю систему десятичной позиционной арифметики. Впоследствии термин «алгоритм» приобрел более широкий смысл всякого регулярного вычислительного процесса, в конечном числе шагов дающего решение определенного класса задач. Такое словопотребление восходит к работам Г. В. Лейбница по дифференциальному исчислению (1684 и след.), а в более узком (арифметическом) смысле — к Кр. Рудольфу (1525).

Дроби

Арабский язык не имеет специальных терминов для выражения долей единицы (аликвотных дробей), меньших $\frac{1}{10}$, все остальные доли называются «одна часть из n », а их кратные — « m частей из n ». Такому словопотреблению соответствовало понятие конкретной дроби, выражающей

одну или несколько частей величины, предполагаемой делимой (абстрактная единица считалась неделимой). Но существовала и другая концепция дроби, как отношения двух отвлеченных целых чисел, восходящая к античной теории пропорций. Эта последняя теория сложилась, так сказать, теоретической основой арабской арифметики. Так, умножение целых чисел определяли в первую очередь как повторное сложение, но такое определение неприменимо в случае двух дробей. Трудность преодолевалась с помощью другого определения: умножить a на b значит выйти число q , удовлетворяющее пропорции $q : a = b : 1$ или же $q : b = a : 1$; такая дефиниция применима в равной мере к целым и дробям. Аналогично определяли деление. Абу-л-Вафа ал-Бузджани (940—998) — уроженец Хорасана, работавший в Багдаде при дворе Бундов, в своей «Книге о том, что необходимо писцам и дельцам из науки арифметики» воздает хвалу такого рода определениям, подчеркивая их общность. Здесь, очевидно, проявляется общая тенденция арабской математики к отождествлению понятий числа и отношения.

Дроби записывали на индийский манер: знаменатель под числителем, а целую часть числа писали над числителем. Разделительная черта появляется около 1200 г.

У чиновников, землемеров, торговцев было издавна в ходу другое исчисление дробей, сходное с тем, которое применяли египетские писцы. Дробь представляли в виде суммы долей единицы $1/n$, $n \leq 10$, и, если требуется, дроби $2/3$, а также их произведений, например $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ или $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$. Когда такое точное представление невозможно, пользовались приближениями вроде $\frac{3}{17} \approx \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}$. Ученые усовершенствовали такое исчисление и выработали целую систему правил для представления любых дробей с помощью аликвотных дробей.

Наконец, арабские астрономы пользовались почти исключительно шестидесятиричными дробями — традиция, восходящая через александрийских астрономов к древнему Вавилону. Подобно александрийским ученым, астрономы стран ислама обозначали шестидесятиричные цифры с помощью буквенной нумерации. Шестидесятиричный нуль они обозначали знаком ζ , несомненно происходящим от знака o , применявшегося в Александрии. Астроном, работавший с шестидесятиричными дробями, имел под руками таблицу умножения до 59·59 и применял словесно выраженные правила $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($m > n$).

Александрийские астрономы применяли смешанную десятично-шестидесятиричную систему: целые числа, в том числе числители дробей, они писали по десятичной системе. Арабские ученые как бы восстановили древний вавилонский счет и распространили шестидесятиричный принцип на целые числа, причем систематически употребляли при этом знак нуля. Числа от 1 до 59 писались при этом в специальной алфавитной нумерации. Действия в этой системе, употреблявшейся при астрономических расчетах, производятся, как в нашей десятичной системе целых и дробей. Первое подробное описание такой системы встречается в «Книге о началах арифметики индийцев» (ок. 1000) Кушьяра ибн Лаббана. Мы находим его также в «Ключе арифметики» (1427) Гияс ад-Дина Джемишида ал-Кашн (ум. в 1429 или 1436), уроженца иранского города Кашана. В начале XV в. ал-Кашн был приглашен Улугбеком для

руководства Самаркандской астрономической обсерваторией. Вместе с Улугбеком и другими самаркандскими астрономами ал-Каши участвовал в составлении астрономических таблиц Улугбека. Улугбеку посвящен и «Ключ арифметики». Дробные шестидесятиричные разряды именовались минутами, секундами, терциями и т. д., разряд единиц (от 1 до 59) — градусами, а высшие разряды — первыми поднятыми, вторыми поднятыми и т. д.

Выдающимся достижением ал-Каши явилось введение десятичных дробей.

Попытки введения десятичных дробей в странах ислама делались и раньше, сразу же после введения десятичной нумерации. Такие дроби имеются в «Книге разделов об индийской арифметике» Абу-л Хасана Ахмада ал-Уклидиси («ал-Уклидист» можно перевести как «последователь Евклида»), написанной в Дамаске в 952—953 гг. Этот автор, не давая общего описания системы десятичных дробей и их свойств, приводит примеры употребления их при делении вечетных чисел пополам и вычислениях вроде $135(4,1)^6$ или $13(0,9)^6$. Целую часть десятичной дроби он отделял от дробной апострофом сверху. Однако трактат ал-Уклидиси не оказал влияния на позднейших ученых стран ислама.

Целью ал-Каши было дать систему дробей, в которой, как в шестидесятиричной системе, все операции проводятся, как с целыми числами, но которая основана на общеупотребительном десятичном основании и потому доступна тем, кто не знает «исчисления астрономов». Ал-Каши формулирует основные правила действий с десятичными дробями, способы перевода шестидесятиричных дробей в десятичные и обратно; в его трудах многие величины выражены с помощью десятичных дробей. Десятичная дробь записывалась в одной строке с целой частью числа; для ее обозначения ал-Каши отделял дробь от целого вертикальной чертой или писал другим цветом или подписывал над цифрами названия разрядов, чаще всего называя только низший разряд, определяющий все остальные.

Как уже говорилось, десятичные дроби издавна применялись в Китае. Возможно, что до ал-Каши доходили об этом сведения, однако сам он считал десятичные дроби своим собственным изобретением. Во всяком случае, регулярное их применение и подробное описание операций принадлежат ему. Спустя некоторое время десятичные дроби получили некоторое распространение в Турции. В Европе первый набросок системы десятичных «прим», «секунд», «терций» и т. д. предложил Пьером де Бонфис из Тараскона в XIV в., а систематическим введением десятичных дробей мы обязаны голландцу С. Стевину (1585).

Извлечение корней и «бином Ньютона»

Ал-Хорезми описал лишь прием извлечения квадратных корней. Около 1000 г. у Кушйра ибн Лаббана мы находим и прием извлечения кубических корней. Он был изложен и в книге учителя Кушйра Али ан-Насави (ум. 1030) «Достаточное об индийской арифметике». Ал-Насави был уроженцем хорасанского города Насы — нынешнего Алхбада.

Дальнейшая разработка приемов извлечения корней принадлежит одному из крупнейших математиков Средних веков Омару Хайяму (1048—1131), особенно прославившемуся своими блестящими четверостепенными,

которые переведены ныне на все важнейшие языки мира и до сих пор поражают читателей глубиной лирико-философских раздумий и блестящей афористической формой. Хайям, уроженец города Нишапура в Хорасане, в молодости покинул свою родину, подвергнувшись нашествию кочевников-сельджуков, и после нескольких лет тяжелых мытарств некоторое время работал в Самарканде. В 1074 г. его пригласили в Исфахан для руководства астрономической обсерваторией. Исфаханский период был наиболее плодотворным в жизни Хайяма, он закончился в 1092 г. со смертью покровительствовавшего ему сельджукского султана Малик-шаха и его везира Низам ал-Мулка. После этого Хайям вновь скитается, иногда работает в Мерве при дворе преемников Малик-шаха, но восстановить обсерваторию ему уже не удается. Хайям был автором ряда важных математических трудов, а также астрономических таблиц и нескольких философских сочинений. В своей книге по алгебре Хайям, упомянув «методы индийцев» извлечения квадратных и кубических корней, основанные на правилах

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

и

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

сообщает, что в специальном сочинении он обобщил эти методы на случай извлечения корней с любым целым показателем. «Мы показали, — пишет Хайям, — как определять основания квадрато-квадратов, квадрато-кубов, кубо-кубов и так далее сколько угодно, чего раньше не было»¹. Весьма вероятно, что уже Хайям владел правилом возведения двучлена в любую целую положительную степень. Однако сочинение Хайяма, в котором изложено это открытие, пока не найдено.

Первое дошедшее до нас описание извлечения корня любой степени из целого числа встречается в «Сборнике по арифметике с помощью доски и пыли» (1265) Насир ад-Дина ат-Туси (1201—1274). Ат-Туси, уроженец города Туса в Хорасане, работал сначала в столице государства ассасинов, управлявшегося террористической сектой, борющейся с различными врагами иранских феодалов — багдадскими халифами, европейскими крестоносцами и монгольскими завоевателями. После взятия в 1253 г. монголами столицы ассасинов ат-Туси перешел на службу к монгольскому хану Хулагу и вскоре стал его советником. По совету ат-Туси Хулагу организовал в своей столице Маргае (Южный Азербайджан) одну из крупнейших в Средние века астрономическую обсерваторию, в которой работали ученые из всех стран, захваченных монголами. Здесь под руководством ат-Туси были составлены «Зльханские астрономические таблицы». Ат-Туси принадлежит много трудов по математике и астрономии, а также по физике, минералогии, логике, этике и другим наукам. В «Сборнике по арифметике» ат-Туси подробно описал прием извлечения корней на примере $\sqrt[6]{244\,140\,626}$. Отыскание целой части корня следует схеме, которая была известна ранее китайцам и совпадает по существу с методом, предложенным в начале XIX в. Горнером и Руффини. Дробная часть корня $\sqrt[n]{a^n + r}$, где a , n , r — целые числа и $a^n + r < (a + 1)^n$, находится

¹ Омар Хайям. Трактаты. Перевод Б. А. Розенфельда под редакцией В. С. Сегали и А. П. Юлиевича. М., 1962, стр. 74—75.

приближенно в виде $\frac{r}{(a+1)^n - a^n}$, так что в его примере

$$\sqrt[6]{244140626} = 25 \frac{1}{25^6 - 25^5} = 25 \frac{1}{64775151}.$$

Ат-Туси словесно излагает правило образования разности

$$(a+b)^n - a^n = \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

и приводит «таблицу элементов показателей», т. е. биномиальных коэффициентов $\binom{n}{m}$ до $n = 12$ в форме треугольника, почти не отличающейся от той, которую мы теперь называем «треугольником Паскаля». Ат-Туси была известна и зависимость между элементами таблицы

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

Очень подробно изложен весь этот круг вопросов у ал-Каши. Но-видимо-му, эти общие результаты не дошли в свое время до Европы и здесь пришлось их получать заново.

Теория отношений и действительные числа

С самого начала развития математики в арабских странах чрезвычайно большое место в ней занимают приближенные вычисления, необходимые для составления тригонометрических и астрономических таблиц, определения различных геометрических величин (длины окружности, элементов правильных многоугольников и многогранников и т. д.). Быстрое развитие числовой алгебры и ее геометрических приложений, о которых мы еще скажем далее, также вели к тому, что иррациональные числа все чаще и чаще входили в употребление и становились предметом исследования. Простейшие операции с радикалами вроде

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{50} \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{4}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4}{6}}$$

производил ал-Хорезми; вскоре становятся известными более общие правила, которые мы записываем в виде формул

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} = \sqrt[n]{a^m b^n}.$$

Частое оперирование алгебраическими иррациональностями в их арифметической форме подготовляло почву для выделения понятия об иррациональном числе, равноправном с рациональными числами — целыми и дробями. Иррациональное число начинает представляться более простым объектом, чем античные несоизмеримые отрезки. Это нашло, например, выражение в многочисленных комментариях к X книге «Начал» Евклида, посвященной теории квадратических иррациональных величин, в которых такие величины их преобразования посвящаются с помощью соответствующих арифметических иррациональностей. Так, об-

щие преобразования величин, которые можно выразить формулами

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

или

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

Ибн ал-Багдади около 1100 г. иллюстрировал примерами

$$\sqrt{10} \pm \sqrt{8} = \sqrt{18 \pm \sqrt{320}} \text{ и } \sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 1$$

и т. п. Постепенно стирается различие между геометрическими несоизмеримыми величинами и числовыми иррациональностями, числовая иррациональность становится иррациональным числом; вместе с тем любое отношение величин воспринимается как число. Такое расширение понятия о числе могло явиться лишь результатом теоретического исследования.

Критический анализ античной теории пропорций был начат еще Абу Абдаллахом ал-Махани (ум. ок. 880) в «Трактате о трудностях отношения» и продолжен многими учеными. В «Комментариях к трудностям во введениях книги Евклида», написанных Хайямом около 1077 г., определение пропорции в V книге «Начал» объявляется хотя и правильным, но не «истинным», т. е. не выражающим основной сути пропорции. Вместо этого определения Хайям по примеру ряда своих предшественников выражает равенство двух отношений A/B и C/D через равенство всех соответствующих неполных частных разложений этих отношений в непрерывные дроби:

$$\frac{A}{B} = (q_0, q_1, q_2, \dots) \quad \text{и} \quad \frac{C}{D} = (q'_0, q'_1, q'_2, \dots).$$

т. е.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

если $q_n = q'_n$ для всех $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Мы передали в современных обозначениях определение, которое сам Хайям выражает только словами. Аналогично вводятся отношения «больше» и «меньше». По существу такие определения, возникшие давно забытую к тому времени доевдоксову теорию пропорций, уже содержали в себе понимание любого несоизмеримого (иррационального) отношения как числа. Хайям доказывает логическую эквивалентность новой и античной теории пропорций. Попутно он пытается доказать принцип существования четвертой пропорциональной к трем данным величинам B, C, D , т. е. величины A , образующей с ними пропорцию $A/B = C/D$. Этот важный принцип, широко применявшийся в античной математике, не получил в ней общего обоснования. Впрочем, доказательство Хайяма содержало, с нашей точки зрения, существенный пробел: он опирался на недостаточный «принцип непрерывности», под которым понимал только бесконечную делимость величины. Далее Хайям развивает учение о составных отношениях, т. е., как мы бы сказали, об умножении и делении отношений, необходимых в приложениях к практическим вычислениям.

В заключение Хайям подходит к обобщению понятия числа на любые положительные действительные числа. Он вводит понятие отвлеченной делимой единицы и, рассматривая отношение двух произвольных непрерывных величин A и B , говорит: «Выберем единицу и сделаем ее отношение к величине C , как A к B . Будем смотреть на величину C не как на линию, поверхность, тело или время, но будем смотреть на нее, как на величину, отвлеченную разумом от всего этого и принадлежащую к числам, но не к числам абсолютным и постоянным, так как отношение A к B часто может не быть числовым»¹. Так как под «числами абсолютными и настоящими» Хайям понимает вслед за греками натуральные числа, эта отвлеченная числовая величина трактуется как число в обобщенном смысле слова, так сказать, как «несобственный элемент» расширенной числовой области. Идеи Хайяма были восприняты и развиты ат-Туси. Вопрос об их возможном влиянии на развитие идеи числа в европейской математике остается пока открытым.

Что касается понятия об отрицательном числе, возникшем в Китае и Индии, то оно не нашло сколько-нибудь заметного применения в арабской науке. В одном случае оно встречается в арифметическом трактате Абу-л-Вафы, который рассматривает умножение числа 2, называемого им «долг (дайн) два», на 10, при котором получается —20 («долг двадцать»). Та же терминология встречается, с одной стороны, у индийских математиков, являвшихся учителями арабов, а с другой — у ученика арабов Леонардо Пизанского; возможно, что она имела у математиков стран ислама более широкое распространение. У самаркандского математика Али Кушчи (ум. 1474), бывшего в молодости послом Улутбека при китайском императоре, в «Мухаммедовом трактате по арифметике», посвященном турецкому султану Мухаммеду II, встречаются термины «мусбати» и «манфи», имеющие тот же смысл, что и китайские термины «чжэн» и «фу». Сам Кушчи употреблял эти термины в значении «прибавляемое» и «отнимаемое» (у его предшественников — «занд» и «накис»). Математики Западной Европы, познакомившиеся с сочинением Али Кушчи через византийцев, перевели эти термины на латынь как *positivus* и *negativus* и стали обозначать ими положительные и отрицательные числа (в этом смысле термины Кушчи применяются и ныне в Турции, Иране, Азербайджане и Средней Азии).

Арифметические задачи

Теория пропорций получила практические применения в решении многих арифметических задач, возникавших в торговом деле, распределении налогов, разделе наследств в соответствии с нормами мусульманского права и т. д. Из Индии было заимствовано тройное правило, о котором говорится уже в алгебраическом трактате ал-Хорезми, и правила 6, 7 и 9 и т. д. величин. Ал-Бируни посвятил этим правилам специальную «Книгу об индийских рапиках», в которой дает их обоснование с помощью теории составных отношений.

Паряду с тройным правилом в ходу было правило двух ложных положений, полученное, по видимому, непосредственно из Китая и при-

¹ *Опер Хайям*. Трактаты, стр. 144—145.

	x	5
x	x^2	$5x$
5	$5x$	25

Рис. 59

решение шести канонических классов уравнений первой и второй степеней, которые он, как и все его преемники в странах арабского Востока, записывали без всякой символики:

- 1) $ax^2 = bx$; 4) $ax^2 + bx = c$;
- 2) $ax^2 = c$; 5) $ax^2 + c = bx$,
- 3) $bx = c$; 6) $bx + c = ax^2$.

Сам ал-Хорезми выражал уравнение, скажем, четвертого класса так: «Квадраты и корни равны числу». Чтобы решить какое-либо уравнение первой или второй степени, его требуется предварительно свести к одному из этих типов, которые, как видно, не содержат вычитаемых членов. Для этого применяются операции, давшие название как трудам по алгебре, так и самой этой науке. Операция ал-джабр (восполнение) есть перенос вычитаемых членов уравнения в другую часть в виде прибавляемых членов; ал-мукабала (противопоставление) есть сокращение равных членов в обеих частях. Кроме того, требовалось привести коэффициент a при квадрате к единице, так как правила решения формулировались для этого случая. Таким образом, уравнение $2x^2 + 100 - 20x = 58$ с помощью ал-джабра преобразуется в $2x^2 + 100 = 58 + 20x$ и после деления на 2 с помощью ал-мукабалы — в уравнение пятого класса $x^2 + 21 = 10x$.

Что касается решений, то ал-Хорезми формулирует лишь правила, дающие положительные корни уравнений. Уравнения четвертого и шестого классов всегда имеют один и только один такой корень (другой отрицательный); уравнение пятого класса либо имеет два таких корня, либо вовсе не имеет действительных корней. Ал-Хорезми указывает условия, при которых корни существуют, в том числе когда есть только один корень (мы бы сказали теперь — двойной). Правила формулируются на примерах с числовыми коэффициентами, но вполне общим образом. Основаны правила для четвертого и шестого классов с помощью некоторых геометрических преобразований прямоугольных фигур, соответствующих нашим алгебраическим преобразованиям. Например, правило решения уравнения $x^2 + 10x = 39$ доказывается следующим образом. Незвестная величина x изображается линией, x^2 — квадратом, построенным на этой линии, а произведение $10x$ — суммой двух прямоугольников со сторонами x и 5 (рис. 59). Эти прямоугольники вместе с квадратом образуют Г-образную фигуру с площадью 39. Наконец, Г-образная фигура дополняется квадратом со стороной 5 до полного квадрата с площадью 64. Сторона полного квадрата одновременно есть $x + 5$ и 8; следовательно, $x = 3$.

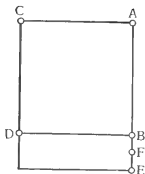


Рис. 60

Это и другие доказательства ал-Хорезми напоминают теоремы античной геометрической алгебры, но лишь отчасти. Предшественники ал-Хорезми в алгебре неизвестны; несомненно, что он опирался на местные традиции, синтезировавшие элементы вавилонской и греческой математики. В алгебраическом трактате ал-Хорезми мы находим также краткие сведения о действиях с алгебраическими выражениями, некоторые примеры алгебраического решения треугольников и большой отдел задач на раздел наследств, выражающихся уравнениями первой степени.

Другой вариант геометрических доказательств и несколько более полный анализ правил решения квадратных уравнений встречается у Ибн Турка ал-Хуттали, уроженца Хуттала — района нынешнего Душанбе, современника ал-Хорезми. И, наконец, доказательства этих правил для четвертых — шестых классов квадратных уравнений с помощью V—VI предложений II книги «Начал» Евклида, выражающих правила

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad (a+b)a + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2,$$

мы находим у багдадского ученого Сабита ибн Корры (836—901).

Ибн Корра, уроженец сирийского города Харрана, принадлежал к потомкам древних вавилонян — сабиям, из среды которых вышли многие астрономы и математики. В эпоху эллинизма сабии усвоили греческий язык. Поссорившись со своими единоверцами, Ибн Корра приехал в Багдад, примкнул к кругу ученых, группировавшихся около братьев Бану Муса, и вскоре занял в нем выдающееся место. Ибн Корра — автор многих сочинений по математике, астрономии и механике, он также переводил или редактировал переводы с греческого и сирийского. Именно в его переводах сохранились не дошедшие до нас по-гречески книги «Конические сечения» Аполлония, «Книга лемм», «Книга о семиугольнике» и другие мемуары Архимеда. Все позднейшие ученые Востока пользовались его переводом «Алмагеста» и «Началами» Евклида в его редакции. Квадратным уравнениям посвящен трактат Ибн Корры «Рассуждение об установлении задач алгебры с помощью геометрических доказательств». Приведем в качестве примера обоснование Ибн Корры решения уравнения $x^2 + ax = b$. Ибн Корра строил квадрат $ABDC$, равный x^2 , и продолжал одну из его сторон на отрезок $BE = a$ (рис. 60). Далее он строил прямоугольник DE , равный произведению ax . Тогда прямоугольник $CE = ABDC + DE$ равен $x^2 + ax = b$ и, следовательно, известен. Но если середина отрезка BE — точка F , то в силу VI предложения II книги

«Начал» $EA \cdot AB + BF^2 = AF^2$. Так как произведение $EA \cdot AB = \text{пл. } EC$ и BF^2 известны, известен и квадрат AF , а следовательно, и сама линия AF . Искомая линия $AB = x$ равна разности известных линий AF и BF . Отметим, что Ибн Корра называл алгебру уже просто «ал-джабр» без «ал-мукабалы».

Алгебра квадратных уравнений получила дальнейшее развитие в «Книге об ал-джабр и ал-мукабале» египетского математика X в. Абу Камила ал-Мисри. Абу Камил с большим искусством владел различными преобразованиями, в частности иррациональных выражений. Его книга уже не содержит геометрических приложений. Этому вопросу Абу Камил посвятил специальное сочинение, где с помощью квадратных уравнений решены многие задачи на определение элементов правильных пяти- и десятиугольников, вписанных в данный круг или описанных около него. Приведем одну любопытную задачу, в которой нарушено античное требование однородности слагаемых величин и вместе с тем приходится действовать с иррациональными числами. Требуется найти высоту равностороннего треугольника, если сумма площади и высоты равна 10. Дело сводится к уравнению

$$x^2 + \sqrt{3}x^2 = \sqrt{300},$$

корень которого

$$x = \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}} - \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Иранский математик Абу Бакр ал-Караджи в посвященном багдадскому вазире Фахр ал-Мулку трактате «Ал-Фахри» (ок. 1010) дал решение трехчленных уравнений вида

$$ax^{2n+m} + bx^{n+m} = cx^m,$$

непосредственно приводящих к квадратным. Но самые замечательные результаты относятся к уравнениям третьей и отчасти четвертой степени.

Кубические уравнения

Первый толчок в этом направлении сообщила задача Архимеда о делении данного шара плоскостью на два сегмента с данным отношением объемов. Решения, найденные Архимедом и его преемниками, остались арабам неизвестными. Первый шаг сделал ал-Махани, выразивший задачу уравнением типа $x^3 + r = px^2$. Вслед затем несколько ученых X в. — ал-Хазин, Ибн ал-Хайсам и другие — дали геометрическое построение величины x , представив ее (используем нашу терминологию) как абсциссу точки пересечения двух подходящим образом подобранных конических сечений. Этот геометрический метод, известный грекам со времен Евдокса (его применил к удвоению куба Менокс), приобрел основное значение в алгебре стран ислама.

На протяжении X в. уравнениями высших степеней с числовыми или же произвольными коэффициентами был выражен целый ряд геометрических, тригонометрических и физических задач: построение сторон вписанных в данный круг правильных девяти- и семиугольников, построение сегмента шара по данному объему и площади поверхности, задача о трисекции данного угла и др. Все эти задачи сводятся к уравнениям третьей степени. Трисекции угла посвящен трактат Сабита ибн Корры

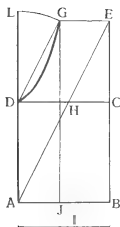


Рис. 61

«Деление прямолинейного угла на три равные части». Ибн Корра, следуя Архимеду, сводит эту задачу к построению с помощью «вставки», а задачу о помещении отрезка I между сторонами CD и продолжением стороны BC прямоугольника $ABCD$ таким образом, чтобы продолжение этого отрезка проходило через вершину A , он сводит к проведению через вершину D гипербола, для которой прямые AB и BC служат асимптотами, и к проведению окружности с центром D и радиусом I (рис. 61). Если гипербола и окружность пересекутся в точке G , а GE и GJ — перпендикуляры, опущенные из точки G на прямые AB и BC , то искомый отрезок — отрезок HE прямой AE ; в силу известного свойства гиперболы

$$AD \cdot DC = GJ \cdot GE,$$

откуда

$$\frac{GJ}{AD} = \frac{DC}{GE}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{EB}{BC} = \frac{DC}{GE}.$$

Но

$$\frac{EB}{BC} = \frac{EA}{AH} = \frac{DC}{DH},$$

откуда $GE = DH$. Поэтому четырехугольник $DHEG$ — параллелограмм, и, следовательно, $HE = DG = I$. В том же сочинении с помощью пересечения гиперболы и окружности решена задача построения двух средних пропорциональных между двумя линиями, частным случаем которой является задача удвоения куба. В обработке Ибн Корры сохранилась упоминавшаяся ранее «Книга о семиугольнике» Архимеда.

Построение стороны правильного вписанного девятиугольника для вычисления тригонометрических таблиц подробно изложено в крупнейшем астрономическом произведении средневекового Востока — «Каноне Мас'уда» Абу-р-Райхана ал-Бируни (973—ок. 1050). Уроженец г. Кят (ныне город Бируни Узб.ССР), ал-Бируни сначала работал в родном ему Хорезме и в Гургане на южном берегу Каспийского моря, а с 1017 г., после захвата Хорезма афганским султаном Махмудом Газневи, был принужден переехать в столицу империи Махмуда Газну. После завоевания Махмудом Северной Индии ал-Бируни прожил в ней несколько лет и глубоко изучил санскритскую научную литературу. Ал-Бируни при-

надлежит большое число сочинений по различным разделам математики и естествознания вплоть до минералогии и фармакогнозии. «Канон Мас'уда», посвященный сыну Махмуда Мас'уду вступившему на престол в 1030 г., — огромный энциклопедический труд, в котором, помимо астрономии, имеются большие части, посвященные тригонометрии, хронологии и географии. В тригонометрической части «Канона» ал-Бируни свел определение стороны вписанного правильного девятиугольника, т. е. хорды 40° , к кубическим уравнениям $x^3 = 1 + 3x$ и $x^3 + 1 = 3x$, в первом из которых x — хорда дуги $2/9$ окружности, а во втором x — сторона вписанного правильного 18-угольника. Приближенно решая первое из этих уравнений, ал-Бируни нашел, что $x = 1;52,45,47,13$, откуда следует, что хорда $1/9$ окружности равна $0;41,2,32,41,55$. Однако он не сообщил здесь способа приближенного вычисления корней и лишь описал итерационный прием нахождения стороны девятиугольника, состоящий в последующем определении хорд 30° , 60° и 72° (т. е. $1/12$, $1/6$ и $1/5$ круга), а затем хорд $12^\circ = 72^\circ - 60^\circ$, $42^\circ = 30^\circ + 12^\circ$, $1/4 \cdot 42^\circ = 10^\circ 30'$, $40^\circ 30' = 30^\circ + 10^\circ 30'$, $1/4 \cdot 40^\circ 30' = 10^\circ 7' 30''$, $40^\circ 7' 30''$ и т. д. Ал-Бируни довел вычисления до значения $0;41,2,32,42,29$, отличающегося от результата приближенного решения уравнения менее чем на кварту.

Уравнение четвертой степени впервые появилось в «Книге оптики» Абу Али ибн ал-Хайсама (965—1039). Уроженец Басры в Ираке, Ибн ал-Хайсам работал главным образом в Каире; ему принадлежит много трудов по математике и астрономии. Латинский перевод его «Книги оптики» оказал большое влияние на развитие этой науки в Европе. К уравнению четвертой степени сводится задача Ибн ал-Хайсама об определении места отражения светящейся точки от цилиндрического зеркала по данным положениям точки и глаза. Каирский ученый решил ее с помощью пересечения окружности и гиперболы.

В построении кубических уравнений были достигнуты столь значительные успехи, что вскоре стало возможным создание обобщающей их теории. Наиболее удачное изложение ее дал Омар Хайям в «Трактате о доказательствах задач алгебры» (1074). В этом труде алгебра впервые выступает как самостоятельная наука. Подобно Ибн Корре, Хайям нередко называл алгебру ал-джабр; он употребляет также термин «алгебраисты» (джабриййун). Предметом алгебры Хайям объявляет неизвестное число или неизвестную величину, отнесенные к другим известным числам или величинам. Такое отнесение осуществляется в виде уравнения, т. е. приравнивания одних степеней другим. Тем самым алгебра рассматривается как наука об уравнениях, которые мы теперь называем алгебраическими.

Отметив, что поиски числового решения кубических уравнений, т. е. решения в радикалах, оказались тщетными, Хайям высказывает надежду, что это будет сделано в будущем; действительно, это удалось итальянцам в начале XVI в. Общим методом решения объявляется построение корней с помощью пересечения конических сечений.

Главное содержание трактата составляет классификация уравнений, подбор соответствующих каждому классу пар конических сечений и определение возможного числа и границ положительных корней, т. е., как говорят теперь, отделение корней. Уравнения исследуются в общем виде, т. е. коэффициенты их предполагаются произвольными положительными величинами. Всего Хайям различает 14 канонических классов. Для каждого из них он указывает требуемые конические сечения — параболы,

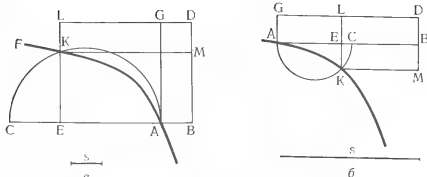


Рис. 62

равносторонние гиперболы и окружности, абсциссы точек пересечения которых выражают корни уравнения, и анализирует условия возможности положительных корней. Так, для решения уравнения $x^3 + qx = px^2 + r$ Хайям строит гиперболу и окружность следующим образом: он считает коэффициент p линией BC , коэффициент q — квадратом со стороной BD , а свободный член r — параллелепипедом с основанием q и высотой $s = AB$ (т. е. $BC = p$, $BD = \sqrt{q}$, $AB = r/q$), и откладывает отрезки AB и BC на одной прямой в одну сторону от точки B , а BD — на перпендикуляре к этой прямой (рис. 62, а, б, где соответственно $r/q < p$ и $r/q > p$). Далее через точку A проводится гиперболa, асимптотами которой служат прямая BD и прямая DL , параллельная AB , и окружность, построенная на отрезке AC , как на диаметре. Если принять за оси координат прямые AB и BD , уравнения этих кривых можно записать в виде

$$y^2 = \left(x - \frac{r}{q}\right)(p - x) \quad \text{и} \quad x(\sqrt{q} - y) = \frac{r}{\sqrt{q}}.$$

Корнем уравнения является абсцисса точки K пересечения этих кривых. Хайям правильно указывает, что во втором случае ($r/q > p$) этот корень единственный (абсцисса r/q точки A не удовлетворяет кубическому уравнению, так как уравнения кривых при исключении y дают уравнение четвертой степени, корни которого — корни кубического уравнения и число r/q), однако он не заметил, что в первом случае ($r/q < p$) могут существовать еще два положительных корня и, таким образом, прошел мимо открытия трех корней кубического уравнения, обнаруженных только Дж. Кардано в XVI в. Впрочем, заметить возможность еще двух точек пересечения кривых на чертеже нелегко. Во всех остальных случаях анализ существования одного или двух положительных корней у Хайяма совершенно правильный. Для примера Хайям применяет свой геометрический метод, комбинируя его с некоторыми расчетами, и к отделению корней уравнений с числовыми коэффициентами.

Геометрическая теория кубических уравнений привлекала внимание математиков стран ислама и позднее, а ал-Каши распространил ее на уравнения четвертой степени. Мы не знаем, однако, изложил ли он свои результаты, мелкоком упоминаемые в «Ключе арифметики», в специальном сочинении. Впоследствии геометрическое построение корней уравнений явилось предметом исследований европейских математиков Нового времени — Декарта и многих других, которые, впрочем, отправлялись от

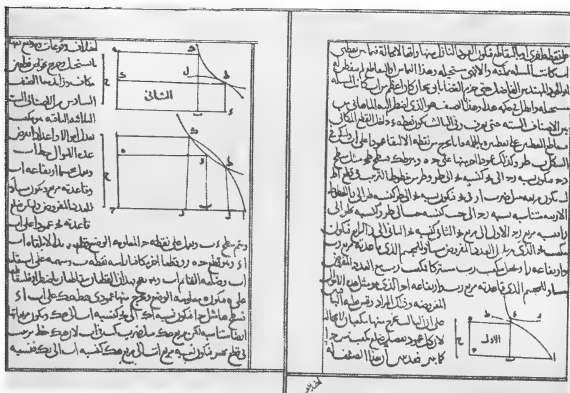
трудов греческих классиков: открытия арабских ученых в этой области были им неизвестны.

Наряду с общей теорией разрабатывались и приемы численного решения уравнений третьей степени. Такие приемы были известны, например, ал-Бируни, который, как мы видели, определял в «Каноне Мас'уда» сторону вписанного правильного девятиугольника. Ал-Каши в недошедшем до нас «Трактате о хорде и синусе» предложил оригинальный итерационный прием решения уравнения трисекции угла, которое можно записать в виде

$$x^3 + q = px,$$

где $x = \sin \varphi$, $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4} \sin 3\varphi$. Метод ал-Каши известен нам в изложении Кази-заде ар-Руми, работавшего в Самаркандской обсерватории одновременно с ал-Каши, в «Трактате об определении синуса одного градуса» и внука ар-Руми Мирима Челеби в комментариях к астрономическим таблицам Улугбека. Этой же задаче был посвящен и недошедший до нас трактат самого Улугбека. Ал-Каши записывает кубическое уравнение в форме $x = (q + x^3)/p$ и берет в качестве первого приближения $x_1 = q/p$, в качестве второго $x_2 = (q + x_1^3)/p$; далее вычисляются $x_3 = (q + x_2^3)/p$ и т. п. в зависимости от требуемой точности. Этот процесс в рассматривавшихся случаях сходится очень быстро; с его помощью ал-Каши вычислил значение $\sin 1^\circ = 0; 1,2,49,43,11,44$, т. е. в десятичных дробях 0,017 452 406 437 283 571, где все цифры верны. Г. Ганкель писал, что этот прием «не уступает по тонкости и изяществу всем открытым на

Страница рукописи алгебраического трактата Хайяма



Западе после Виета методам приближения»¹. Следует все же добавить, что способ ал-Кашпи — частного характера.

Мы отмечали риторический характер арабской алгебры. Только в мавританских государствах были сделаны первые шаги к созданию алгебраической символики, которые мы знаем по труду «Снятие покрывала с науки губар» ал-Каласади, работавшего в Гренаде перед самой гибелью последнего мавританского эмирата на юге Испании и умершего изгнанником в Африке (1486). Ал-Каласади для обозначения квадратного корня из числа ставил над этим числом букву «джим» — первую букву слова «джизр» — корень, а при записи уравнений для обозначения неизвестных и их квадратов ставил над соответствующими коэффициентами буквы «шин» и «мим» — первые буквы слов «шай» — вещь и «мал» — квадрат. Роль знака равенства играет буква «лам» — возможно, последняя буква слова «йа'далу» — равно. Интересно также обозначение пропорций: члены пропорций разделяются троеточиями вида: ., а неизвестная в пропорциях тройного правила обозначается той же буквой «джим», что и корень (в странах ислама неизвестную, как и у нас, часто называли корнем).

Символика ал-Каласади была столь развита, что невозможно считать ее всецело созданием этого ученого. По-видимому, к его предшественникам принадлежал марокканский мавританский математик XIII в. Ибн ал-Банна ал-Марракуши (из Марокко), который, по сообщению тунисского историка XIV в. Ибн Халдуна, применял при доказательствах алгебраические обозначения, служащие одновременно и для «отвлеченного рассуждения» и для «наглядного представления».

Теория чисел

Достижения в теории чисел были менее значительны. Все же следует упомянуть решение неопределенных уравнений первой степени и их систем в целых числах, иногда требовавшие терпеливых расчетов. Так, Абу Камил в «Книге редкостей в арифметике» нашел все 2676 целых решений системы

$$\begin{aligned}x + y + z + u + v &= 100, \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} + \frac{u}{4} + v &= 100.\end{aligned}$$

Были рассмотрены и некоторые задачи на решение в целых числах уравнений второй степени.

Быть может, особенно замечательно, что математики стран ислама впервые высказали утверждение, составляющее первый частный случай великой теоремы Ферма, именно, что уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ неразрешимо в рациональных числах (кроме тривиального случая, когда хотя бы одна из неизвестных равна нулю). В свою очередь, это утверждение связано с предположением о неразрешимости в рациональных числах задачи об удвоении куба $2x^3 = z^3$, которое должно было возникнуть еще у древних греков. «Трактат о построении прямоугольных треугольников с

¹ H. Hankel. Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, 1874, S. 292.



Улугбек.
Скульптурный портрет М. М. Герасимова

рациональными сторонами и о пользе их познания» Абу Джа'фара Мухаммеда ибн ал-Хасана (переписанный в 970 г.), посвященный построению пифагоровых троек чисел, начинается с упоминания, что этот вопрос был изложен Абу Мухаммедом ал-Худжанди перед доказательством того, что «сумма двух кубических чисел не является кубическим числом»¹. Имя Мухаммед в арабской записи, где гласные опускаются, только одной буквой отличается от имени Махмуд, а в X в. работал известный математик и астроном Абу Махмуд Хамид ал-Худжанди. Поэтому обычно считают, что автором трактата о кубических числах был этот ученый. Однако Хамид ал-Худжанди умер около 1000 г., а в рукописи, переписанной в 970 г., об ал-Худжанди говорится «да помилует его Аллах», как говорится только о покойных. Ал-Худжанди, как показывает это имя, происходит из города Ходжента — нынешнего Ленинабада; быть может, первый из них был учителем второго.

Доказательство неразрешимости уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в рациональных числах, данное Абу Мухаммедом ал-Худжанди, не сохранилось. Весьма сомнительно, чтобы оно было безошибочным: для этого недоставало арифметических средств. Наиболее раннее доказательство этого предложения дал Эйлер в середине XVIII в.

¹ F. Woepcke. Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, Atti dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei, 1861, v. 14, p. 301.

Сабит ибн Корра посвятил «Книгу о нахождении дружественных чисел легким способом» изложению способа образования дружественных чисел, т. е. пар чисел, каждое из которых равно сумме делителей другого. Способ Ибн Корры, обобщающий пифагорейский способ образования совершенных чисел, изложенный в «Началах» Евклида, состоит в том, что если $p = 3 \cdot 2^n - 1$ и $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ — простые числа, то числа $M = 2^n pq$ и $N = 2^n (p + q + pq)$ — дружественные числа (при $n = 2$ мы получаем $M = 220$ и $N = 284$).

Геометрические вычисления

В геометрии большое место занимали вопросы, связанные с применением вычислительных методов. К этому кругу проблем относятся уже упоминавшиеся применения алгебры; использовались с этой целью и тригонометрические приемы. Уже «Книга измерения плоских и шаровых фигур» братьев Бану Муса, написанная в середине IX в., свидетельствовала о глубоком усвоении античных приемов измерения, в частности изложенных в «Измерении круга» Архимеда. В дальнейшем вычисление со все возрастающей точностью элементов фигур, особенно правильных многоугольников и многогранников, занимало многих ученых; сказанное относится и к точному или приближенному вычислению круглых фигур и их частей, а также фигур, встречающихся в строительном деле, — арок, сводов, полых куполов и поверхностей в форме сталактитов.

Быть может, самым ярким примером искусного применения вычислительной техники служит «Трактат об окружности» ал-Каши, в котором длина окружности вычислена (с помощью последовательного извлечения квадратных корней) как среднее арифметическое периметров вписанного и описанного правильных многоугольников с числом сторон $3 \cdot 2^{28}$. Это дало ал-Каши для отношения длины окружности к диаметру, т. е. числа π , приближение $\pi = 3;08,29,44,00,47,25,53,07,25$, которое он здесь же переводит в десятичные дроби: $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 25$, где неверна только последняя цифра 5, которую следовало бы заменить на 38.... Подобная точность была вновь достигнута лишь сто пятьдесят лет спустя А. ван Роменом, который воспользовался вписанным и описанным 2^{30} -угольниками.

Заметим в этой связи, что математики стран ислама уже высказывали мысль об иррациональности числа π — факт, доказанный только в XVIII в. Ламбертом и Лежандром.

Геометрические построения

Для нужд землемерия, архитектуры, техники разрабатывались и методы геометрических построений. Внук Сабита ибн Корры Ибрахим ибн Синан (908—946) посвятил теории геометрических построений специальную «Книгу о методе анализа и синтеза и о других действиях в геометрических задачах». В «Книге о построении трех (конических) сечений» Ибн Синан рассматривает семь способов построения эллипса, гиперболы и параболы по точкам с помощью циркуля и линейки. Абу Саид ас-Сиджизи (X — XI вв.) в «Трактате об описании конических сечений» применил для непрерывного построения всех трех конических сечений так

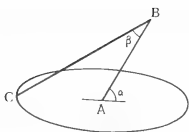


Рис. 63.

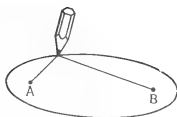


Рис. 64

называемый совершенный циркуль, одна из ножек которого при вращении может вытягиваться и сокращаться по длине отрезка прямолинейной образующей конуса от его вершины до точек сечения. На рис. 63 изображен совершенный циркуль, ножка AB которого закреплена под углом α к плоскости бумаги, а ножка BC переменной длины вращается вокруг ножки AB под углом β . Заметим, что эксцентриситет e конического сечения связан с углами α и β соотношением $e = \cos \alpha / \cos \beta$, т. е. при $\alpha > \beta$ сечение является эллипсом, при $\alpha = \beta$ — параболой, а при $\alpha < \beta$ — ветвью гиперболы.

Непрерывному построению эллипса с помощью нити, закрепленной в его фокусах (так называемый способ садовника), посвящен написанный в IX в. трактат одного из братьев Бану Муса ал-Хасана «Об удлинненном круге». На рис. 64 изображено построение таким образом эллипса с фокусами A и B .

Большое число геометрических построений изложено в «Книге о том, что необходимо ремесленнику из геометрических представлений» Абу-л-Вафы ал-Бузджани¹. Помимо элементарных задач, решаемых с помощью циркуля и линейки точно, здесь даются и приближенные построения, например для правильных семи- и девятиугольников; рассмотрены и механические приемы трисекции угла, а также удвоения куба. Около полутора десятков задач решено с помощью циркуля постоянного раствора — такие построения представляли практический интерес, ибо на открытой местности удобно пользоваться окружностями фиксированного радиуса. Абу-л-Вафа указывает также способы построения по точкам параболы, которую он называет «зажигательным зеркалом». Интересны построения Абу-л-Вафы на сфере: помимо элементарных задач сферической геометрии здесь решаются задачи разделения сферы на сферические многоугольники, получаемые проектированием из центра сферы ребер вписанных в нее правильных и полуправильных многогранников. Построениям на сфере посвящено и специальное «Рассуждение о циркуле для больших кругов» Ибн ал-Хайсама.

Из геометрических задач Абу-л-Вафы отметим остроумное построение квадрата, равновеликого трем равным квадратам, путем раскроя этих квадратов: два из них делятся диагонально пополам, полученные треугольники приставляются к сторонам третьего квадрата. Тогда фигура

¹ Недавно выяснилось, что большая часть этой книги Абу-л-Вафы текстуально совпадает с написанной на 50 лет ранее «Книгой духовных искусных приемов и природных тайн о тонкостях геометрических фигур» знаменитого философа Абу Насра ал-Фараби (ок. 870—950).

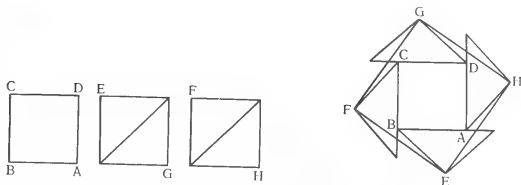


Рис. 65

EFGH — искомый квадрат, который получается отрезанием выступающих частей треугольников и вставлением их на место конгруэнтных им частей квадрата *EFGH*, не заполненных треугольниками (рис. 65). Абу-л-Вафа показывает неточность методов, которыми решают эту задачу ремесленники, а также решает другими методами, из которых следует отметить построение стороны утроенного квадрата как диагонали куба, построенного на одном из малых квадратов. Особенно важно замечание Абу-л-Вафы к последнему методу: «Точно так же обстоит дело, если мы хотим построить квадрат, состоящий более чем из трех или менее чем из трех квадратов»¹, который для $n > 3$ квадратов означает мысленное построение диагонали n -мерного куба, построенного на данном квадрате. Именно в эту эпоху на Востоке получили распространение геометрические названия степеней выше третьей: квадрато-квадрат (мал ал-мал), квадрато-куб (мал ал-ка'б) и кубо-куб (ка'б ал-ка'б) и т. д., являющиеся переводами терминов Диофанта и их обобщениями; эти термины были хорошо известны Абу-л-Вафе, которому принадлежат комментарии к «Арифметикам» Диофанта.

Теория параллельных

Среди общих проблем геометрии пристальное внимание арабских ученых привлекла теория параллельных. Постулат параллельных Евклида (если прямая образует с двумя другими прямыми, лежащими в одной плоскости, внутренние односторонние углы, в сумме меньше двух прямых, то это прямые при достаточном продолжении пересекаются с той стороны, где эта сумма меньше двух прямых) был подвергнут специальному рассмотрению еще греками. Многие полагали, что содержащееся в этом постулате утверждение является теоремой, которую можно доказать с помощью других постулатов и аксиом «Начал».

Первый арабский труд по этому вопросу был написан еще ал-Аббасом ал-Джаухари, работавшим под руководством ал-Хорезми. Ал-Джаухари в «Совершенствовании книги „Начала“» опирался на неявно предполагае-

¹ Абу-л-Вафа ал-Бузджани. Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений. Перевод С. А. Красновой. «Физико-математические науки в странах Востока», 1966, вып. I(IV), стр. 118.

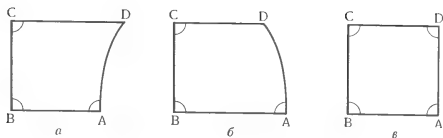


Рис. 66

мое допущение, равносильное доказываемому постулату: если при пересечении двух прямых какой-либо третьей накрестлежащие углы равны, то то же имеет место при пересечении тех же двух прямых любой другой прямой. Он доказал в качестве теоремы предложение: через любую точку внутри любого данного угла можно провести прямую, пересекающую обе его стороны. На скрытом допущении этого предложения основывалось одно из доказательств постулата о параллельных, придуманных Лежандром.

Два трактата, посвященные доказательству V постулата, принадлежат Сабиту ибн Корре. В «Книге о доказательстве известного постулата Евклида» Ибн Корра основывается на предположении, что если две прямые удаляются друг от друга с одной стороны, они обязательно приближаются с другой стороны. С помощью этого утверждения, равносильного V постулату, Ибн Корра доказывает существование параллелограмма, после чего уже легко доказывается V постулат. В «Книге о том, что две линии, проведенные под углами, меньшими двух прямых, встретятся» Ибн Корра исходит из существования равноотстоящих прямых, с помощью чего доказывает сначала существование прямоугольника. Здесь, однако, существование равноотстоящих прямых на плоскости (утверждение, само по себе равносильное доказываемому) не постулируется: Ибн Корра пытается вывести его из представления о «простом движении», т. е. о равномерном поступательном движении вдоль прямой. Именно, он считает очевидным (здесь-то и скрыто утверждение, содержащее доказываемый постулат), что при таком движении все движущиеся точки описывают прямые линии.

Ибн ал-Хайсам также рассмотрел теорию параллельных в двух сочинениях. В трактате «О разрешении сомнений в книге Евклида „Начала“» исходным служит утверждение, что две пересекающиеся прямые не могут быть параллельны одной прямой, т. е. что из одной точки нельзя провести двух параллелей к одной прямой. В «Книге комментариев к введениям книги Евклида „Начала“» Ибн ал-Хайсам использует то же представление о «простом движении», что и Ибн Корра. С помощью «простого движения» Ибн ал-Хайсам устанавливает, что конец отрезка, перпендикулярного к прямой, вдоль которой происходит движение, описывает прямую, которая, таким образом, является равноотстоящей от данной прямой. Далее доказывается существование прямоугольника, для чего рассматриваются четырехугольник с тремя прямыми углами и три гипотезы о четвертом угле этого четырехугольника, который априори можно предположить острым, тупым и прямым (рис. 66).

Как мы теперь знаем, гипотеза острого угла имеет место в геометрии Лобачевского, в которой выполняются все аксиомы геометрии Евклида,

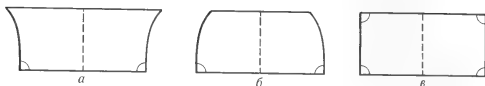
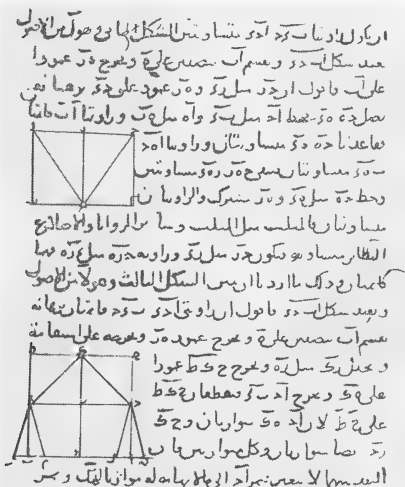


Рис. 67

кроме V постулата. Гипотеза тупого угла выполняется в неевклидовой геометрии Римана (эллиптическая геометрия) и на сфере, если считать большие круги сферы прямыми линиями. Наконец, гипотеза прямого угла имеет место в геометрии Евклида. Ибн ал-Хайсам опровергает первые две гипотезы с помощью «доказанного» им существования равноотстоящих прямых. Такой же четырехугольник и те же гипотезы рассматривал, правда по-иному, в XVIII в. Ламберт.

Страница рукописи Хайяма «Комментарии к трудностям
во введениях книги Евклида»



Омар Хайям в «Комментариях к трудностям во введениях книги Евклида» подверг критике доказательство Ибн ал-Хайсама, считая вслед за Аристотелем, что в геометрию недопустимо вводить движение. Собственное доказательство Хайяма базируется на принципе, который он считал более простым, чем постулат Евклида: две сходящиеся прямые пересекаются, и невозможно, чтобы две сходящиеся прямые расходились в направлении схождения. Каждое из этих двух утверждений равносильно постулату Евклида. В отличие от многих своих предшественников, Хайям формулировал свой постулат явно. В его рассуждениях основную роль играет рассмотрение четырехугольника с двумя равными сторонами, перпендикулярными к основанию. Углы, прилежащие к четвертой стороне, равны между собой; подобно Ибн ал-Хайсаму, Хайям разбирает три гипотезы о величине этих углов (рис. 67). Опровергая гипотезы острого и тупого углов, он также приходит к существованию прямоугольника, и т. д. Комментарий Хайяма к Евклиду оказал влияние на работы по теории параллельных Насир ад-Дина ат-Туси, который в своем «Изложении Евклида» предложил доказательство, основанное на постулате: если прямые, расположенные в одной плоскости, расходятся в одном направлении, они не могут в этом направлении сходиться, если только не пересекаются. И он рассматривает четырехугольник Хайяма и три гипотезы о нем.

Заметим, что тот же четырехугольник и те же три гипотезы были положены в основу исследований по теории параллельных итальянского математика первой половины XVIII в. Саккери.

Мы назвали далеко не всех математиков, занимавшихся теорией параллельных на протяжении IX—XIV вв. Разумеется, арабские математики были далеки от мысли о создании неевклидовой геометрии и только стремились вывести постулат Евклида о параллельных из принципов, которые считали более очевидными. Но попутно они сделали несколько выдающихся открытий: установили двустороннюю зависимость между этим постулатом и величиной суммы углов четырехугольника и, следовательно, треугольника; установили логическую эквивалентность ряда предложений теории параллельных; применили для опровержения гипотез острого и тупого углов способ приведения к противоречию и т. д. При этом Хайям получает некоторые предложения, по существу принадлежащие к первым теоремам неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана.

Исследования по теории параллельных ат-Туси стали известными в Европе в XVII в., в частности Валлису, и таким образом сыграли роль в подготовке одного из крупнейших открытий математики — систем неевклидовых геометрий.

Тригонометрия

Тригонометрия возникла сначала в форме исчисления хорд в трудах александрийских астрономов. Индийцы, отправляясь от этих трудов, ввели линии синуса, косинуса и синуса-версуса. Познакомившись с индийскими «сидхантами», арабские ученые существенно продвинули вперед разработку тригонометрии, которая стала благодаря им разветвленной и самостоятельной наукой.

Первоначально тригонометрия излагалась в составе астрономических сочинений, заключавших и тригонометрические таблицы. Мы уже указы-

вали, что арабы называли линию синуса словом «джайб» (транслитерация индийского слова «джива» — хорда, тетива), переведенным на латынь словом *sinus*; от латинского сокращения выражения *complementi sinus*, которым было переведено арабское выражение «джайб тамам» — синус дополнения, произошел наш «косинус». Понимая под словом «синус» линию синуса, арабы называли радиус круга «наибольшим синусом» или «полным синусом»; последнее выражение долго сохранялось в Европе в виде названия *sinus totus* и обозначения *sin tot.*

Линии тангенсов и котангенсов арабы первоначально именовали соответственно «обращенной тенью» (зилл ма'кус) и «плоской тенью» (зилл мустав) — названиями, восходящими к гномонике александрийских астрономов и объясняющимися тем, что линии тангенса и котангенса первоначально рассматривались как тени гномона — горизонтального и вертикального — соответственно на вертикальную и горизонтальную плоскости; позже эти линии стали называть соответственно «тенью» и «тенью дополнения» (в Европе их вначале называли *umbra* — тень). Линии синуса и косинуса измеряли, следуя традиции александрийских и индийских астрономов, в 60-х долях радиуса, а линии тангенса и котангенса — в 7-х и 12-х долях гномона.

Линии секанса и косеканса, являющиеся отрезками прямой диаметра, сначала называли диаметрами обращенной и соответственно плоской тени, а впоследствии — первым и вторым диаметрами. Теоретический интерес этих двух последних линий невелик, но таблицы их вплоть до открытия логарифмов имели практическую ценность, поскольку позволяли заменять деление на косинус и синус умножением. Наиболее ранние таблицы синусов в арабском мире были составлены, по-видимому, ал-Хорезми, а в астрономических таблицах его современника Хабаши ал-Хасиба ал-Марвази имелись уже линии тангенса, котангенса, секанса и косеканса.

Вслед за индийскими астрономами ученые стран ислама при решении астрономических задач пользовались правилами сферической тригонометрии. Например, Сабит ибн Корра в «Книге о часовом инструменте, называемом солнечными часами» дал два решения задачи об определении высоты h Солнца над горизонтом по широте φ местности, склонению δ Солнца и его часовому углу h (см. стр. 201). Правила Ибн Корры в наших обозначениях имеют вид

$$\sin h = (\sin \text{vers } t_0 - \sin \text{vers } t) \frac{\sin (\pi/2 - \varphi + \delta)}{\sin \text{vers } t_0}$$

и

$$\sin h = \sin (\pi/2 - \varphi + \delta) - \sin \text{vers } t \cos \varphi \cos \delta,$$

где t_0 — угол ZPA на рис. 55. Первое правило отличается от правила Варахамихиры только тем, что произведение $\cos \varphi \cos \delta$ заменено равным ему отношением

$$\frac{\sin (\pi/2 - \varphi + \delta)}{\sin \text{vers } t_0} = \frac{\cos (\varphi - \delta)}{1 + \text{tg } \varphi \cdot \text{tg } \delta};$$

во втором правиле h находится без помощи t_0 . То и другое равносильно сферической теореме косинусов. Эти же правила изложены в «Книге о науке звезд» ал-Баттани, а затем ал-Бируни в «Каноне Мас'уда» и другими астрономами стран ислама.

К той же теореме сводились правила определения расстояния между двумя городами с данными географическими координатами и определения направлений на священный город мусульман Мекку (так называемая кыбла) в городе с данными координатами. В первом случае при определении расстояния AB между городами A и B в сферическом треугольнике ABN , образованном этими городами и северным полюсом Земли N , известны угол N , равный разности долгот городов A и B , и расстояния (в градусах) NA и NB , равные дополнениям широт городов A и B до $\pi/2$. Во втором случае, если считать, что город B — Мекка, требуется узнать угол A того же треугольника. К задачам сферической тригонометрии сводятся также важные для сферической астрономии задачи взаимного перехода между тремя применяемыми в астрономии системами координат на небесной сфере: экваториальной, где роль экватора играет небесный экватор, а роль полюса — полюс мира, вокруг которого совершается видимое суточное вращение светил; эклиптической, где роль экватора играет эклиптика, по которой совершается видимое годичное движение Солнца, а роль полюса — полюс эклиптики, и, наконец, горизонтальной, где роль экватора играет линия горизонта, а роль полюса — зенит.

Сферической тригонометрии было посвящено также сочинение Сабита ибн Корры «Трактат о фигуре секущих», в котором доказана сферическая теорема Менелая, формулируемая еще не с помощью синусов, как у последующих математиков, а, следуя Менелая и Птолемею, с помощью хорд удвоенных дуг.

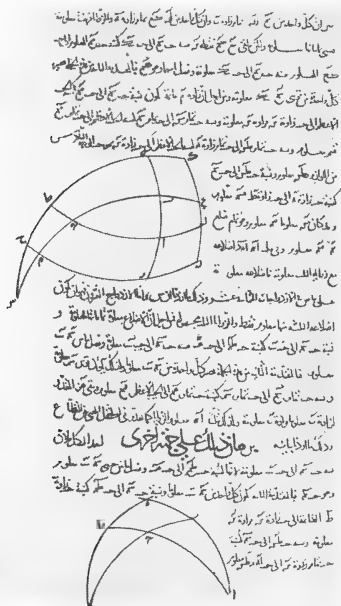
На рубеже IX и X вв., например, в «Книге о науке звезд» сабия Абу Абдаллаха ал-Баттани (ок. 850—929) учение о тригонометрических функциях, представившихся в виде отрезков, связанных с кругом определенного радиуса, достигло довольно высокого развития. Были найдены простейшие соотношения между ними, разработаны приемы составления тригонометрических таблиц и установлен ряд основных теорем, служащих для решения плоских и сферических треугольников. Правда, запас этих теорем был невелик и потому решение треугольников было часто довольно громоздким. Весьма значительного развития достигло искусство решения сложных тригонометрических задач в «Каноне Мас'уда» ал-Бируни. Математики и астрономы стран ислама проявили большое вычислительное искусство при составлении тригонометрических таблиц. Мы упоминали об алгебраическом вычислении $\sin 1^\circ$ ал-Каши, но уже в X в. Абу-л-Вафа в своем «Алмагесте» с помощью тонких интерполяционных приемов вычислил $\sin 0^\circ,5$ с точностью до 10^{-8} . Абу-л-Вафа пользовался линейным интерполированием; ал-Бируни предложил в «Каноне Мас'уда» применять квадратическое интерполирование.

Одним из замечательных образцов высокой техники приближенных вычислений может служить итерационный прием решения трансцендентного уравнения, получившего позднее имя Кеплера — уравнения $t = \theta - k \sin \theta$ (где t — данное число), встретившегося арабским ученым в теории параллакса. Прием, применявшийся еще ал-Хасибом ал-Марвази, состоит в образовании последовательных приближений

$$\begin{aligned} \theta_0 &= t + k \sin t, \\ \theta_1 &= t + k \sin \theta_0, \\ \theta_2 &= t + k \sin \theta_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

ал-Хасиб мог удовлетвориться отысканием θ_3 .

В XI в. появляется сводное сочинение, посвященное сферической тригонометрии, — трактат «Собрание правил науки астрономии» (теоремы сферической тригонометрии, необходимые для астрономии, называли «правилами астрономии»). Имя автора в дошедшей до нас рукописи не указано, сказано только, что трактат посвящен некоему Амид ал-Мулку Абу Насру Мансуру ибн Мухаммеду и написан в Исфахане через два года после того, как была закрыта астрономическая обсерватория, которой руководил автор. Как видно из предисловия, автору известен «Канон Мас'уда» ал-Бируни, законченный в 1030 г.; рукопись переписана в начале XIII в. Поэтому весьма возможно, что упомянутый Амид ал-Мулк — Кундури (1024—1064), везир сельджукского султана Тогрул-бека.



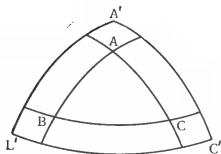


Рис. 68

Трактат состоит из трех книг. В первой изложена теория составных отношений, где, как и в комментариях Хайяма к Евклиду, составление отношений трактуется как умножение некоторых величин. Во второй книге выводятся плоская и сферическая теоремы Менелая, а в третьей доказываются теоремы сферической тригонометрии, «заменяющие» теорему Менелая и решаются все шесть задач определения элементов сферического треугольника по трем известным, в том числе впервые — по трем углам. В связи с последней задачей здесь впервые же определяется полярный треугольник, вершины которого являются полюсами $A'B'C'$ сторон данного треугольника ABC , а стороны определяются через углы данного треугольника (рис. 68).

Если в «Каноне Мас'уда» тангенс и котангенс называются еще «обращенной и плоской тенью», здесь мы встречаем уже «тень» и «тень дополнения», однако автор иногда сбивается на старую терминологию. Дальнейшие авторы уже прочно перешли на терминологию, введенную, по-видимому, в этом трактате. Рассматриваемый трактат — первое большое сочинение, специально посвященное сферической тригонометрии.

Все последующие авторы писали сочинения по сферической астрономии по плану этого трактата. Таков «Трактат о полном четырехстороннике» Насир ад-Дина ат-Туси (1260) и упоминаемая ат-Туси книга Фазл ад-Дина ас-Салара, его предшественника на посту советника Хулагу-хана, казненного последним в 1262 г. Трактат ат-Туси состоит из пяти книг: первая также посвящена теории составных отношений, вторая — плоской теореме Менелая, третья — тригонометрическим функциям, четвертая — сферической теореме Менелая, пятая — теоремам сферической тригонометрии, «заменяющим» теорему Менелая. Здесь изложены в переработанном виде и все шесть случаев определения элементов сферического треугольника по трем из них и теория полярного треугольника. Трактат ат-Туси, в свою очередь, оказал значительное влияние на дальнейшее развитие этой науки, в частности на Региомонтана.

Инфинитезимальные методы

Уже в середине IX в. арабские математики владели античным методом исчерпывания, который обогатили некоторыми приемами, позволившими им получить по-новому уже ранее известные, а также и совсем новые результаты. В «Книге измерения плоских и сферических фигур» братьев Ба-

ну Муса методом истощения доказан ряд предложений, имеющих в трактатах Архимеда «Измерение круга» и «О шаре и цилиндре».

Близка к Архимеду и «Книга о карастуне» Сабита ибн Коррры, посвященная теории рычажных весов. Находя равнодействующую двух равных параллельных сил, представляемых грузами, подвешенными к балке или коромыслу весов, он обобщает эту задачу на случай, когда к балке «подвешено сколь угодно грузов и даже бесконечно много»¹. В случае любого конечного числа равных параллельных сил, приложенных на равных расстояниях друг от друга, равнодействующая равна сумме этих сил и приложена в середине отрезка между крайними точками приложения сил. Обобщая этот факт на случай бесконечно многих сил, Ибн Корра приходит к тому, что равнодействующая непрерывной нагрузки, равномерно распределенной на отрезке, приложена в середине этого отрезка. С математической точки зрения этот результат равносильен вычисле-

нию интеграла $\int_a^b x dx$.

В «Книге об измерении конического сечения, называемого параболой», Ибн Корра весьма оригинально произвел квадратуру сегмента параболы. То, что площадь этого сегмента равна $2/3$ описанного около него параллелограмма, доказал еще Архимед, причем двумя способами: так называемым механическим методом и суммированием геометрической прогрессии, но соответствующий мемуар великого сиракузянина не был, по-видимому, известен арабским ученым. Во всяком случае, Ибн Корра решает задачу по-другому: он рассматривает параболу и делит ее диаметр на неравные части, относящиеся между собой как нечетные числа $1 : 3 : 5 : 7 : \dots$. Тогда расстояния точек деления от вершины относятся как квадраты $1 : 4 : 9 : 16 : \dots$, а соответствующие ординаты точек параболы — как натуральные числа $1 : 2 : 3 : 4 : \dots$. Таким образом, вычисление Ибн Кор-

рры равносильно вычислению интеграла $\int_0^a \sqrt{x} dx$, причем он впервые делит отрезок интегрирования на неравные части. Это вычисление было существенным шагом вперед по сравнению с древними, так как у Архимеда встречаются лишь выкладки, равносильные интегрированию $\int_0^a x dx$ и

$$\int_0^a x^2 dx.$$

Прием Ибн Корры получил дальнейшее развитие только в XVII в., когда с помощью родственного приема — деления отрезка интегрирования на неравные части в геометрической прогрессии — П. Ферма вычис-

лил интегралы $\int_0^a x^{m/n} dx$.

Задача квадратуры параболы была решена еще одним чрезвычайно изящным методом внуком Ибн Корры Ибн Синаном в «Книге об измерении параболы». Сначала Ибн Синан доказывает, что если один многоугольник получен из другого с помощью аффинного преобразования, то пло-

¹ E. Wiedemann. Die Schrift über den Qarastun. Bibliotheca mathematica, Ser. 3, 1912. Bd. 12, H. 1, S. 29.

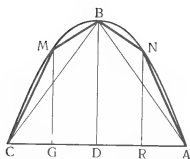


Рис. 69

щадь треугольника, начерченного в первом многоугольнике, относится к площади соответствующего треугольника во втором многоугольнике, как площади этих многоугольников. Отметим, что здесь впервые появляется аффинное преобразование наиболее общего вида; Ибн Синан не имеет еще никакого термина и описывает соответствие многоугольников, указывая на параллельность соответствующих линий и на сохранение отношений отрезков соответствующих прямых. Далее утверждение с помощью метода исчерпывания обобщается на сегменты парабол и на вписанные в них треугольники, основаниями которых являются хорды сегментов, а вершинами — концы диаметров, сопряженных с этими хордами (рис. 69). И, наконец, Ибн Синан доказывает, что площадь сегмента параболы равна $\frac{4}{3}$ площади вписанного в него треугольника, сравнивая сегмент параболы с одним из малых сегментов, из которых состоит избыток сегмента над треугольником (рис. 69 большой сегмент — ABC , малые — ANB и BMC). Ибн Синан доказывает, что площади треугольников, вписанные в малый и большой сегменты, относятся, как $1 : 8$, откуда в силу доказанного следует, что таково же отношение и площадей самих сегментов, т. е. площадь сегмента относится к площади избытка, как $4 : 1$ и, следовательно, к площади вписанного треугольника, как $4 : 3$.

В «Книге измерения параболических тел» Ибн Корра рассматривает тела, полученные вращением сегмента параболы. Он называет тела, образованные вращением сегмента около его хорды, параболическими сферами, а тела, полученные вращением сегмента около одного из его диаметров, — параболическими куполами. Ибн Корра различает яйцевидные и тыквообразные параболические сферы (рис. 70, а, б) и параболические купола с гладкой, выступающей и вдавленной вершинами (рис. 70, в, г, д). Параболический купол с гладкой вершиной — сегмент параболоида вращения, объем которого был найден Архимедом в сочинении «О коноидах и сфероидах». В «Книге измерения параболических тел» находятся объемы параболических куполов всех трех типов методом, близким к методу предыдущего трактата Ибн Корры. Более простой метод определения кубатуры параболических куполов был предложен в конце X в. францем Абу-с-Сахлом ал-Кухи. Ибн Корра и ал-Кухи нашли, что объем параболического купола с гладкой, выступающей или вдавленной вершинами равен половине объема прямого кругового цилиндра тела вращения параллелограмма, описанного около сегмента параболы, при вращении которого относительно одного из его диаметров получается параболический купол (объем этого тела вращения равен объему прямого кругового цилиндра с той же боковой поверхностью).

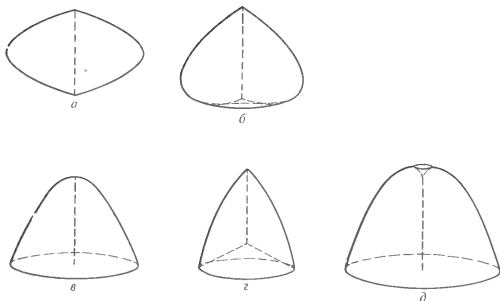


Рис. 70

Объем параболической сферы был найден в трактате «Об измерении параболического тела» Ибн ал-Хайсама. Это вычисление потребовало суммирования ряда четвертых степеней натуральных чисел, древним неизвестного:

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[(n+1)n - \frac{1}{3}\right].$$

Далее Ибн ал-Хайсам доказывает неравенства

$$\frac{8}{15} (n-1) \cdot n^4 < \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 < \frac{8}{15} n \cdot n^4,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 > \frac{8}{15} n \cdot n^4,$$

с помощью которых он, применяя метод исчерпывания, доказывает, что объем параболической сферы равен $8/15$ объема тела вращения параллелограмма, описанного около сегмента параболы, при вращении которого относительно одной из ее хорд получается параболическая сфера (объем этого тела вращения также равен объему прямого кругового цилиндра с той же боковой поверхностью). Вычисление Ибн ал-Хайсама было равно-

сильно новому интегрированию $\int_0^n x^4 dx$. Перечисленные и некоторые другие открытия оставались, однако, неизвестными в Европе до недавнего времени.

Другое направление инфинитезимальных исследований берет свое начало в «Книге о замедлении и ускорении движения по зодиакальному кругу в соответствии с его расположением относительно эксцентрического круга», также принадлежащей Ибн Корре. Трактат посвящен изучению видимого движения светила (например, Солнца) по эклиптике в соответствии с одной из гипотез Птолемея о движении по эклиптике, согласно которой истинное движение светила — равномерное по кругу с центром

D), расположенному в плоскости эклиптики эксцентрично относительно Земли *E* (рис. 74). В трактате показывается, что скорость видимого движения достигает минимума в точке *A* эксцентрического круга, наиболее удаленной от Земли (т. е. в апогее светила), достигает максимума в точке *C*, наиболее близкой к Земле (т. е. в перигее), меньше в точках, более близких к точке *A*, и больше в точках, более близких к точке *C*. Термина «скорость» у Ибн Корры нет, в этом смысле он применяет слово «движение» (харака), но терминами «замедление» (ибта) и «ускорение» (сур'а) он пользуется.

Особенно интересно предложение трактата: «Что касается среднего равномерного движения на зодиакальном круге, то оно не является истинным ни в каком месте, за исключением двух точек эксцентрического круга, в которых всегда движение среднее... Это — две точки, видимое расстояние каждой из которых от самого дальнего расстояния по зодиакальному кругу — четверть круга»¹. В этом предложении показывается, что в точках *B* и *F*, для которых углы *ABE* и *AFE* прямые, мгновенная скорость равна средней. Таким образом, в этом трактате Ибн Корра приходит к представлениям о мгновенной скорости и ускорении такого движения.

Эти идеи получили дальнейшее развитие в книге ал-Бируни «Метод исследования движения Солнца» и его «Каноне Мас'уда». В «Каноне Мас'уда» ал-Бируни характеризует движение Солнца по эклиптике (при той же гипотезе, что и у Ибн Корры) вблизи апогея и перигея следующим образом: «Замедление будет происходить по обе стороны от апогея, а предел замедления — в нем самом. Затем замедление уменьшается и переходит в ускорение, предел которого в перигее. Далее ускорение уменьшается и переходит в замедление»². Ал-Бируни также отмечает, что «замедление движения в апогее переходит в его ускорение в перигее только после того, как оно проходит через равенство его и среднего (движения) в месте наибольшего угла уравнения. Изменение его по обе стороны от этого места не ощущается, так как приращение (угла уравнения) уменьшается от апогея до указанного места, потом как бы останавливается в нем, а затем увеличивается до тех пор, пока Солнце не достигнет перигея»³. Под углом уравнения точки *M* эксцентрического круга подразумевается угол *DME*, равный разности углов *ADM* и *AEM*, под которыми дуга *AM* видна из центров *D* и *E*.

Следует отметить также, что, сформулировав в «Каноне Мас'уда» правило квадратичного интерполирования для таблиц синусов и тангенсов, ал-Бируни указывает, что «это уточнение возможно и для всех таблиц по общему правилу»⁴, и формулирует это правило для всевозможных встречающихся здесь непрерывных зависимостей, заданных, впрочем, таблицами, независимо от того, являются ли графики, выражающие эти зависимости, пользуясь современной терминологией, выпуклыми кривыми, как график синуса, или вогнутыми кривыми, как график тангенса.

Заметим также, что в философской литературе на арабском языке нашло отражение и античное атомистическое учение о пространстве и времени, отвергавшееся Аристотелем и Евклидом. Упомянем прежде

¹ O. Schirmer. Studien zur Astronomie der Araber. Sitzungsberichte der Phys.-Med. So zietät. Erlangen. 1926, Bd 58, S. 37—38.

² Abu'l-Rayhan al-Biruni. Al-Qanunu'l-Mas'udi, v. I—III. Hyderabad, 1954—1956, p. 666.

³ Там же, стр. 667.

⁴ Там же, стр. 353.

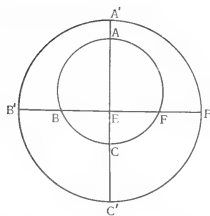


Рис. 71

всего сочинения «мутакаллимов» — приверженцев так называемого калама, основанного в X в. ал-Аш'ари, которые придерживались атомистической точки зрения как на пространство, так и на время (таким образом они стремились обосновать основное положение своего учения, согласно которому Аллах каждое мгновение вновь создает мир, вследствие чего ничто не может совершиться не по его воле). Далее, заслуживают внимания философская полемика ал-Бируни с Ибн Синой по поводу книг Аристотеля «Физика» и «О небе», где ал-Бируни оспаривал мнение Аристотеля о порочности атомистической точки зрения, а Ибн Сина защищал его, а также критика атомизма в комментариях к Аристотелю западноарабского философа Ибн Рушда (Аверроэс, 1126—1198). Латинские переводы философских трудов Авиценны и Аверроэса сыграли существенную роль при начальной разработке новых течений математической и механической мысли в средневековых Оксфордской и Парижской школах.

Значение математики стран ислама

Математика стран ислама оказала исключительное влияние на развитие математики как на Востоке, так и на Западе. Мы уже упоминали о том, что в XIII в. в Ханбалыке (Пекин) появились исследования по сферической тригонометрии. Эти работы, несомненно, связаны с деятельностью Насир ад-Дина ат-Туси. Известно, что в 1267 г. в Ханбалык прибыл сотрудник Марагинской обсерватории Джамал ад-Дин (по китайским источникам — Чжа-ма-лу-тин), доставивший туда новые астрономические приборы, а также что в Мараге работал китайский астроном Фао Мун-чи. Мы указывали также, что крупный среднеазиатский ученый XI в. ал-Бируни прожил несколько лет в Индии. В своей «Индии» ал-Бируни писал, что он познакомил индийских ученых с «Началами» Евклида, «Алмагестом» Птолемея и некоторыми своими трактатами, переводя их на санскрит.

Но особенно глубоким было влияние математики стран ислама на Западную Европу. Математики мавританских государств Северной Африки и Пиренейского полуострова, внесшие в развитие математики гораздо

меньший вклад, чем их восточные коллеги, сыграли исключительно важную роль в ознакомлении европейцев с достижениями ученых стран ислама и их греческих, индийских и восточных предшественников. С начала XI в. в течение около ста лет распространение сведений, полученных с Востока, имело в развитии математики в Европе решающее значение. В районы Испании, освобождающиеся от власти мавров, ученые многих стран Европы приезжали знакомиться с математикой и естественными науками. В XII в. здесь достигает блестящего расцвета деятельность переводчиков и компиляторов арабских и переведенных с греческого сочинений. В это время на латынь переводится ряд сочинений ал-Хорезми, Бану Муса, Ибн Корры, Ибн ал-Хайсама и других математиков Востока и по существу создается латинский вариант арабской математической литературы. «Начала» Евклида и многие сочинения Архимеда переводятся на латынь сначала с арабских переводов. Европейцы изучали арабскую литературу не только в Испании. Итальянец Леонардо Пизанский обучался математике в Северной Африке и объехал многие страны Востока. Переводы с арабского продолжали играть существенную роль и позже, когда в Европе наметились собственные оригинальные направления. Достаточно упомянуть Региомонтана, основой тригонометрического труда которого были работы ал-Баттани и Насир ад-Дина ат-Туси.

Начиная с XIV в. основным путем влияния ученых стран ислама на Европу становится Византия. В этот период многие сочинения переводятся с арабского сначала на греческий, а затем с греческого на латынь и живые европейские языки. Мы уже упоминали о том, что вскоре после взятия Константинополя турками Ала ад-Дин ал-Кушчи познакомил византийских ученых с некоторыми открытиями ученых самаркандской школы. Это видно из того, что в византийских рукописях XV в. приводятся вычисления с десятичными дробями со ссылкой на то, что этот способ заимствован у турок, а также из того, что первой европейской рукописью, где встречаются термины «положительный» и «отрицательный», является немецкая рукопись, приписываемая мифическому автору по имени *Incipit Algebras*. В ней сказано, что ее оригинал был написан по-арабски, с арабского она была переведена на греческий, с греческого — на латынь, а с латыни — на немецкий (мы видели, что эти термины встречались в трактате самого ал-Кушчи). Были переведены на латынь и астрономические таблицы Улугбека.

О влиянии науки стран ислама на науку Европы говорят такие наши термины, как «арабские цифры», «алгебра», «алгоритм», «цифра», «корень», «синус». Арабского происхождения также многие астрономические термины и большинство названий звезд. Усвоение учеными Европы науки стран ислама позволило начать строить европейскую науку на прочном фундаменте и не повторять заново весь пройденный их предшественниками путь.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА

СРЕДНЕВЕКОВАЯ ЕВРОПА

Феодализм в Европе

В середине I тысячелетия н. э. произошел социальный и политический распад Римской империи, вызванный кризисом рабовладельческого хозяйства, борьбой покоренных римлянами народов и нашествиями «варваров» (по-гречески — чужеземцев). В восточных районах империи возникает Византийское государство, столицей которого в 330 г. стал Константинополь, несколькими годами ранее заложенный императором Константином на месте древней греческой колонии Византии. В 395 г. Римская империя официально разделилась на Западную и Восточную; в 476 г. германский конунг — вождь Одоакр низверг последнего римского императора Ромула-Августа и занял его престол. С этого времени судьбы Западной и Восточной Римских империй расходятся, хотя Юстиниану и удалось ненадолго объединить их во второй трети VI в. В IV в. христианская церковь связывает судьбу со светской властью, и христианство, бывшее вначале преследуемой верой угнетенных, становится государственной религией. В 313 г. оно получает равноправие с языческими верованиями. Пятьдесят лет спустя император Юлиан предпринимает безнадежную попытку возродить олимпийских богов, но в 391 г. в Византии и вскоре в Риме язычество запрещается и христианство торжествует полную победу. Многочисленные ереси не могли ослабить его все возрастающего идейного влияния. Впрочем, в 1054 г. церковь раскалывается на католическую и православную, предающие друг друга анафеме. Вражда между ними в течение веков затрудняла духовный контакт между Западной и Восточной Европой.

В середине же I тысячелетия на смену рабовладельчеству приходит феодальная формация. Феодализм, как указывал В. И. Ленин, отличался натуральным хозяйством, прикреплением крестьян к земле и «внеэкономическим принуждением», а также низким, рутинным состоянием техники. Главной формой собственности господствующего класса — феодалов была земля, жалуемая ее владельцу и правителю его сеньером на условии несения военной службы и определенных платежей. Так возникает характерная для феодализма сословно-политическая иерархия с крепостным людом внизу и государем-сюзереном наверху.

Время господства в Западной Европе феодальных отношений, продолжавшееся с V—VI вв. около тысячи лет, именуется Средними веками. Эта историческая эпоха делится на три главные стадии.

В столетия раннего феодализма, примерно до XI в., происходило закрепощение крестьян-общинников, города и торговые связи были в упадке. Лишь начинали складываться новые народности и новые языки. Возникали небольшие феодальные государства, постоянно между собой враждовавшие; многие просуществовали недолго. Попытки собрать круп-

ные королевства или империи, вроде предпринятой Карлом Великим на рубеже VIII и IX вв., оказывались на первых порах тщетными: такие государства обычно распадались уже со смертью своих организаторов. Единственным долговечным образованием явилась Священная Римская империя, основанная германским королем Оттоном I в 962 г.; в нее входили многие феодальные государства Германии, Голландии, Австрии, Чехии, Франции и Италии и т. д. Однако эту разнородную империю, включающую страны весьма различного экономического и культурного уровня, постоянно раздирали внутренние и внешние войны; состав ее менялся, и во многих областях император часто не имел фактической власти.

На стадии развитого феодализма, с XI по XV в., ремесло отделяется от сельского хозяйства, растут и крепнут города, все большую силу приобретают ремесленные цеха и купеческие гильдии, ширится торговля и денежное хозяйство. Королевская власть, опираясь на города, вступает в успешную борьбу с непокорными феодалами; возникают и растут прочные монархии, такие, как Англия, Франция, Испания, постепенно отвоевывавшая занятые маврами области Пиренейского полуострова, и другие. Укажем для примера, что французский королевский домен в X в. ограничивался провинцией Иль-де-Франс — несколькими нынешними департаментами вокруг Парижа; только около 1200 г. были присоединены Орлеанская и Нормандская провинции, но еще в XIV—XV вв. самостоятельности Франции угрожали английские короли, которым принадлежали здесь огромные феодалы. Лишь в результате Столетней войны 1337—1453 гг. Франция становится могущественным централизованным государством, а такие провинции, как Прованс, Бретань и Гасконь, были присоединены еще позднее. Конец стадии развитого феодализма был ознаменован в Западной Европе крупными народными восстаниями, нередко принимавшими форму религиозных «еретических» движений.

Наконец, на XV—XVII вв. приходится разложение феодального строя, зарождение в среде городского бюргерства — новой буржуазии и в среде ремесленников — пролетариата, образование важнейших современных наций, крестьянская война и реформация в Германии, борьба гугенотов и католиков во Франции, расцвет — прежде всего в Италии — Возрождения и первые буржуазные революции в Нидерландах, а затем в Англии.

Когда в Западной Римской империи вторгшиеся племена кельтов, германцев и славян образовали вместе с местным населением свои государства, подвергшиеся в середине V в. нашествию гуннов, от прежней цивилизации остались только немногие едва прозябавшие города и христианство. Экономический, технический и культурный уровень долгое время был очень низким, вся общественная эволюция этого примитивного аграрного общества с экстенсивным земледелием, натуральным обменом происходила медленно. Связи с Востоком, особенно после того как арабы лишили Византию Средиземного моря, на некоторое время были почти полностью прерваны. Церковь, господствовавшая над всей духовной жизнью, начала с того, что полностью отвергла культуру греков и римлян, как порождение язычества. Для Тертуллиана, писавшего на рубеже II и III вв., после Евангелия не было нужды в науке; догматы откровения он противопоставлял доводам опыта и рассудка. IV и V века были ознаменованы в Римской империи преследованием светских школ и ученых; наука уходила от христианства в подполье. Но когда церковь вступила

в союз с государством, ей пришлось в конце концов заимствовать и даже развивать некоторые элементы «языческой» культуры и науки. Выдающийся идеолог христианства св. Августин (353—430) говорил, что не следует презирать хорошее, даже если его сказали язычники. Впоследствии монастыри, первый из которых был учрежден в Египте около 340 г., явились важными центрами распространения знаний и просвещения.

Основой прогресса культуры и науки в Средние века служило постепенное развитие ремесла, товарного производства и торговли, подъем — особенно со второй половины XI в. — городов, улучшение материального положения и усиление общественной роли горожан. Существенные различия между состоянием Западной Европы к концу древности и к середине XV столетия Энгельс выразил в следующих словах: «Несравненно более высокое развитие промышленного производства и торговли, созданных средневековым бюргерством; с одной стороны, производство стало более усовершенствованным, более многообразным и более массовым; а с другой — торговые сношения стали значительно более развитыми; судоходство со времени саксов, фризов и норманнов стало несравненно более смелым, а с другой стороны — масса изобретений (и импорт изобретений с Востока), которые не только сделали возможным импорт и распространение греческой литературы, морские открытия, а также буржуазную религиозную революцию, но и придали им несравненно больший размах и ускоренный темп; сверх того, они доставили, хотя еще в неупорядоченном виде, массу научных фактов, о которых никогда даже не подозревала древность: магнитная стрелка, книгопечатание, литеры, льняная бумага (употреблялась арабами и испанскими евреями с XII столетия; с X столетия постепенно входит в употребление, а в XIII и в XIV столетиях становится уже более распространенной бумага из хлопка, в то время как папирус после завоевания Египта арабами совершенно вышел из употребления), порох, очки, механические часы, явившиеся крупным шагом вперед как во *времени* счисления, так и в *механике*»¹.

Духовный мир европейца на протяжении Средних веков обогащается усвоением значительной части античного наследия и достояния стран Востока. Здесь большое значение имели непосредственные контакты с арабской культурой, редкие в X в., но приобретающие систематический характер в XI—XIII вв. Трудно переоценить стимулирующую роль переводов на латынь (ставшую в Западной Европе общим языком ученых) арабских сочинений, в том числе изложений, переработок и переводов греческих авторов. Непосредственное изучение последних приобретает более широкий размах уже позднее, в эпоху Возрождения, в XV—XVI вв. Культура феодальной Европы, включившая в приспособленном виде элементы, созданные ранее, и обогатившая их собственными достижениями, оставила потомству такие бессмертные творения, как романская и готическая архитектура, великолепные изделия художественного ремесла, народное литературное творчество, как «Божественная комедия» Данте, живопись Андрея Рублева и научное мировоззрение Роджера Бекона. О математике пойдет речь далее; здесь же отметим еще появление, начиная с XI в., университетов, которым суждено было в недалеком будущем стать главными рассадниками науки.

Ф. Энгельс. Диалектика природы. М., 1969, стр. 163.

Передовое движение культуры и науки в феодальной Западной Европе протекало сравнительно медленно, в острой борьбе с реакционными силами, чаще всего принимавшей форму борьбы между религиозными течениями. Церковь жестоко преследовала представителей философской и научной мысли, отклонявшихся от религиозной ортодоксии. Инквизиция была официально учреждена в XIII в., но корни ее восходят еще к Веронскому собору 1183 г., который потребовал судебного преследования и осуждения «еретиков». Впрочем, церкви приходилось идти на уступки. Так, от категорического осуждения учений Аристотеля она перешла к признанию его натурфилософии, в обработанном для ее целей виде.

Наибольшие достижения в области науки принадлежат народам более развитых государств — Италии и Франции, Англии и Германии, хотя некоторые замечательные открытия были сделаны и в других странах. Так, Польша дала в XIII в. известного оптика Витело, а в XVI в. — великого Коперника. При отдельных особенностях в различных странах, указывает Энгельс, в последние столетия рассматриваемого времени «вся Западная и Центральная Европа, включая сюда и Польшу, развивалась теперь во взаимной связи, хотя Италия, благодаря своей отдринности унаследованной цивилизации, продолжала еще стоять во главе»¹.

Восточная Римская империя, в отличие от Западной, сохраняла государственное существование еще почти тысячу лет, хотя территория ее со временем все уменьшалась под ударами то славян, то арабов, то турок. И в Византии с середины IX в. укрепляется феодальный строй, причем роль церкви во всей жизни страны оказывается особенно сильной. Сложные перипетии социальной и политической жизни Византии оказывались малоблагоприятными для развития философии и естествознания; в то время как большинство западных стран, пережив века чужеземных нашествий и внутренние раздоры, обрело затем государственную самостоятельность, Византию все больше потрясали собственные неурядицы и неудачи, в конечном итоге внешние войны. Под сильным влиянием Византии складывалась культура тесно с ней связанных балканских стран, Руси, Армении и Грузии, где также получило распространение православие. Сильная феодальная раздробленность этих стран, которая лишь крайне медленно преодолевалась понемногу крепнувшей центральной властью, сыграла роковую роль в их исторических судьбах. Византия в середине XV в. рухнула под натиском турок, названные три страны на долгое время были покорены: Русь — монголо-татарами, Грузия и Армения — и арабами, и монголо-татарами, и турками, и персами. Русь при этом сыграла роль щита, охранявшего от несметных полчищ преемников Чингисхана Западную Европу. Иноземные нашествия надолго задержали культурное и научное развитие восточнохристианских стран и даже отбросили их назад. В России, в частности, нашествие монголов и борьба с ними на протяжении XIII — XV вв. резко задержали начавшийся перед тем в Киевской и Новгородской Руси подъем. Пушкин как-то заметил, что татары не походили на мавров: завоевав Россию, они не подарили ей ни алгебры, ни Аристотеля. В результате к концу Средних веков в развитии наук восточнохристианские страны значительно отстали от стран Западной Европы.

¹ Ф. Энгельс. Диалектика природы, стр. 158.

Рассмотрим прежде всего математику в странах Восточной Европы. В первые столетия Византийской империи продолжали существовать эллинистические философские и научные школы. После разгрома научной школы в Александрии в V в. и запрета императором Юстинианом преподавания на территории империи языческой философии многие ученые эмигрировали из Византии в Иран и Сирию.

В VI в. в Византии появляются христианские ученые, однако о развитии математики мы имеем крайне мало сведений вследствие иконоборчества византийской церкви в VII — IX вв., когда было уничтожено много старинных рукописей.

В V в. в Афинах работал переехавший сюда из Александрии уроженец Византии Прокл Диадох (410—485). Он был философом-платоником и возглавлял афинскую «Академию» — философскую школу последователей Платона (*διάδοχος* — преемник). Прокл был автором комментариев к I книге «Начал» Евклида, являющихся одним из наиболее важных источников по истории античной математики (выше мы неоднократно цитировали эти комментарии). Из собственных математических результатов Прокла наиболее важна его попытка доказать V постулат Евклида.

К началу VI в. относится деятельность уроженца византийской крепости Аскалон в Палестине Евтокия. Евтокию принадлежат комментарии ко многим сочинениям Архимеда и Аполлония. Комментарии Евтокия также содержат много сведений по истории античной математики.

В это же время в Афинах, а затем в Иране при дворе сасанидского царя Хосрова Ануширвана работал уроженец Киликии Симпликий (ум. 549). Симпликий был автором известных комментариев к Аристотелю и к «Началам» Евклида.

Первыми христианинами византийскими математиками были Анфемий (ум. 534) из Тралл и его ученик Исидор из Милета. Анфемий известен главным образом как строитель собора св. Софии в Константинополе (ныне мечеть Айя-София); ему принадлежит трактат о зажигательных зеркалах, весьма интересный для истории конических сечений. Один из учеников Исидора (автор сочинения о правильных многоугольниках, часто присоединяемого к «Началам» Евклида в качестве XV книги), говоря о правиле нахождения углов между гранями правильного многоугольника, указывает, что этот вопрос был предложен «по инициативе Исидора, великого нашего учителя».

Во второй половине XI в. жил Михаил Пселл (1018 — после 1078). Ему приписывается одно сочинение по арифметике и геометрии. В арифметической части дается лишь классификация чисел и отношений. В геометрическом отделе автор утверждает, что, хотя мнения о том, как найти площадь круга, расходятся, наибольшей популярностью пользуется метод, при котором берется среднее геометрическое между площадями вписанного и описанного квадратов. Это дает для π весьма грубое значение $\sqrt{8} = 2,828$. Любопытно небольшое послание Пселла, где приводятся названия алгебраических степеней, причем x^5 он называет *ἄλγος πρῶτος* (первое невыразимое), а x^7 — *ἄλγος δεύτερος* (второе невыразимое). Эти названия показывают, что, в отличие от Диофанта, который называл x^5 «квадрато-кубом» ($x^5 = x^{2+3}$), а x^6 — «кубо-кубом» ($x^6 = x^{3+3}$), т. е. пользовался аддитивной системой названий степеней, где показатели степени выражаются в виде суммы 2 и 3, Пселлу была известна мультипликативная

система, в которой показатели выражаются в виде произведений 2 и 3 (например, $x^6 = x^{2 \cdot 3}$), а x^5 и x^7 не выражаются таким образом. Впоследствии эта система была распространена в Западной Европе.

К XIII в. относится деятельность Максима Плануда (ок. 1260—ок. 1310) из Никомедии, монаха, который был в 1297 г. послом императора Андроника II в Венеции. Плануд написал комментарии к первым двум книгам «Арифметик» Диофанта, в которых, однако, он обошел более трудные места. Плануду же принадлежит «Арифметика по образцу индийцев», где излагается арифметика с помощью девяти знаков чисел от 1 до 9, а также знака, называемого «цифра» (τζίφρα), и обозначающего «ничто». Начертания цифр у Плануда — восточно-арабские. Излагая проверку с помощью девятки, Плануд указывает, что она была открыта индийцами и передана нам арабами.

В 1252 г. примерно в то же время, что и книга Плануда, в Византии появилась книга под тем же почти названием, но не с восточно-арабскими, а с западно-арабскими начертаниями цифр. Иногда позиционная система применялась в Византии и без цифр, заимствованных у арабов: в одной из рукописей XIV в. мы встречаемся с позиционным применением алфавитных цифр, например 18 записывается в виде $\alpha\eta$, дробь $\frac{13}{28}$ — в

виде $\frac{\alpha\gamma}{3\eta}$.

К XIV в. относятся сохранившиеся греческие переводы арабских астрономических таблиц с большим количеством астрономических терминов арабского происхождения. Мы видим, что математики и астрономы Византии находились под значительным влиянием арабов. Ученик и друг Плануда Мануил Мосхопулос (XIII — XIV вв.) написал трактат о магических квадратах, где сообщает правила их построения для $n = 2m + 1$ и $n = 4m$; при этих построениях Мосхопулос применял циклические перестановки.

В XIV в. жили Иоанн Педиасим и Исаак Аргир. Педиасим был хранителем печати патриарха в Константинополе в период царствования Андроника III (1328—1344). Ему принадлежат замечания о трудных вопросах арифметики, трактат об удвоении куба и «Геометрия» — сочинение, весьма близкое к «Измерениям» Герона. Аргир был монахом, одним из многочисленных византийских переводчиков персидских астрономических сочинений. Он написал «Геодезику» и комментарии к первым шести книгам «Начал» Евклида, а также трактат об извлечении квадратных корней, содержащий их таблицу для чисел от 1 до 102 в шестидесятиричных дробях.

Деятельность этих ученых приходится на время политического упадка Византии, вокруг которой все плотнее смыкалось кольцо турецких армий. В 1453 г. Константинополь пал. Часть византийских ученых бежала на Запад, где помогла в изучении греческого рукописного наследия.

Математика в Грузии и Армении

Грузины и армяне, создавшие свои алфавиты на основе греческого, пользовались алфавитной нумерацией, построенной по образцу греческой буквенной нумерации. Так как в грузинском и армянском языках больше согласных звуков, чем в греческом, то к греческим был добавлен ряд

новых букв, что дало возможность обозначать ими не только единицы, десятки и сотни, как греки и их предшественники, но также и тысячи.

Во второй половине VII в. работал выдающийся армянский ученый вардапет (учитель) Анания Ширакаци, уроженец Ширака. Из приписываемой ему автобиографии известно, что он, «сильно возлюбив числительное искусство», долго искал хорошего учителя и в конце концов нашел его в лице греческого математика Тяхика в Трапезунде. Вернувшись на родину, Анания написал ряд сочинений, среди них «Космографию и летоисчисление» и сборник арифметических задач «Вопросы и решения», сохранившийся неполностью — без вводной теоретической части. В сборнике 24 задачи с ответами, но без вывода; почти во всех задачах так или иначе отражена жизнь армянского народа: или в условии говорится о событиях армянской истории, или применяются армянские меры. Задачи — линейные, с одним неизвестным, в одной (№ 22) требуется разделить величину в арифметической прогрессии; есть древнегреческая задача на заполнение бассейна тремя трубами (№ 24). Встречающиеся в задачах дроби записаны в виде сумм долей единицы; например, ответ задачи № 24, который мы записали бы как $6/11$, дается в виде суммы $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{22}$ (хотя эту же дробь можно было бы записать гораздо проще — в виде $\frac{1}{2} + \frac{1}{22}$). Анания Ширакаци составил также обширные таблицы сложения, вычитания и умножения, а также чисел вида $\frac{6000}{n}$, где n пробегает все значения букв армянского алфавита, а частные 0 округляются до целого числа.

Аналогичные таблицы имелись в Армении и для чисел вида $\frac{5000}{n}$, $\frac{4000}{n}$ и некоторых других.

В первой половине XI в. в Армении работал просветитель Григорий Магистрос (ок. 990—1058); до нас дошло начало выполненного Магистросом перевода «Начал» Евклида. В конце XI — начале XII в. в Армении работал астроном Ованес Саркаваг (ок. 1045—1129), автор хронологических работ. Сочинение Саркавага «Многоугольные числа» опиралось на «Арифметику» Никомаха.

В XI—XII вв. в Грузии в Гелатской академии (вблизи г. Кутаиси), основанной грузинским царем Давидом Строителем, работал Иоане Петрици (ок. 1055—1130). Петрици переводил на грузинский язык философские сочинения неоплатоников, в частности Прокла Диадохса; от Прокла Петрици, по-видимому, заимствовал интерес к геометрии. В сочинениях Петрици мы встречаем рассуждения об основных понятиях геометрии: «Геометрия считает свои три измерения первичнее всего, а два из них она производит из одного... Ибо если точка растянется, возникает прямая линия, которая является первым ее отпрыском, а если линия расширяется, производит плоскость»¹.

В XIV в. в Византии работает армянин Николай Рабдас Артавазд, уроженец Смирны. Ему принадлежит издание сочинения Плануда по индийской арифметике с собственными дополнениями. Сохранились два сочинения самого Артавазда на греческом языке в форме писем. Одно из

¹ И. Петрици. Рассмотрение платоновской философии и Прокла Диадохса. Тбилиси, 1942, стр. 239.

них называется: «Краткое и весьма ясное изложение науки счисления, сочиненное в Константиновской Византии Рабдасом Николаем Артаваздом из Смирны, арифметиком и геометром, по просьбе почтеннейшего судебного докладчика, адвоката Георга Хачика, весьма легкое для желающих изучить его». Здесь разъясняются алфавитная система счисления и счет на пальцах до 9999: на левой руке откладывались единицы и десятки, а на правой — сотни и тысячи. При изложении действий арифметики Артавазд замечает, что в случае больших чисел хорошо пользоваться «великим индийским счислением»; в конце письма приведены большие таблицы сложения, вычитания и умножения в алфавитной нумерации, близкие к таблицам Анании Ширакаци.

Во втором письме, обращенном к другу автора — Феодору из Клазомен близ Смирны, рассмотрены дальнейшие арифметические вопросы. Изложены действия с дробями и приближенный способ извлечения квадратных корней, восходящий к Герону. Дроби постоянно сводятся к суммам долей единицы и $\frac{2}{3}$. При умножении и делении дроби сначала приводятся к общему знаменателю, но результат опять выражается в долях единицы. Наряду с задачами на тройное правило есть ряд задач, которые можно записать линейными уравнениями с одним и двумя неизвестными. Много места Артавазд отводит календарным вычислениям.

Древнерусская нумерация

Восходит к греческой буквенной нумерации и древнерусская нумерация. Славянский алфавит содержал ряд букв, добавленных к греческим и обозначавшим звуки, отсутствующие в греческом языке: таковы буквы Б (греческая «бета» у византийцев произносилась, как «в», и называлась «вита», что отразилось в слове «алфавит»), Ж, Ц, Ч, Ш, Щ и др. Однако, в отличие от грузин и армян, славяне не придали числовых значений новым буквам, за исключением букв Ч и Ц, которыми они заменили архаические греческие буквы «коппу» и «сампи». Числовое значение 6 имела славянская буква «зело», похожая на греческую букву ζ — концевую сигму, которой греки заменили первоначально имевшую это числовое значение архаическую дигамму. Славянские буквенные нумерации, основанные на обоих славянских алфавитах — кириллице и глаголице — изображены во втором и третьем столбцах таблицы на стр. 63. Десятки и единицы писались в том порядке, в котором они произносятся; например, пятнадцать (пять-на-десять) обозначалось єї, а двадцать пять — ке. Тысячи обозначались теми же буквами, что и единицы, но со знаком Ѱ. Большие числа записывались теми же буквами, что и единицы, но с различным обрамлением. Наибольшее распространение получила кириллическая нумерация.

Древнерусские математические сочинения

О высоком уровне математических знаний Киевской Руси свидетельствуют замечательные памятники архитектуры Киева.

Первый дошедший до нас математический документ на Руси — математические задачи юридического сборника «Русская правда», написанные в XI в. Эти задачи представляют собой «статьи» о приплоде скота, количестве зерна или сена, собираемого с определенной площади, и т. д.

	10^3	тысяща
	10^6	тьма
	10^{12}	легеон
	10^{24}	леодр
	10^{48}	ворон
	10^{46}	колода

Древнерусские обозначения
больших чисел

В Новгороде — вечевой республике с выборным князем, находившейся в тесных торговых отношениях с «вольными городами» Западной Европы, — было написано первое дошедшее до нас русское математическое сочинение «Учение им же ведати человеку числа всех лет». Автор этого сочинения — ученый монах Кирик (род. 1100). «Учение» написано им в 1136 г. Сочинение посвящено подсчету числа месяцев, недель и дней «от сотворения мира» (1136 г. н.э. считался 6644-м годом «от сотворения мира»), далее подсчитывались также числа и дробные доли чисел. Находились также «солнечные круги» — 28-летние периоды, за которые дни недели возвращаются на те же числа, и «лунные круги» — 19-летние периоды, за которые на те же числа возвращаются фазы Луны. Эти подсчеты Кирика были, несомненно, связаны с хронологическими вычислениями, проводившимися в это время в Западной Европе.

Татарское нашествие (XIII — XV вв.) надолго задержало развитие науки на Руси. Полчища Батия, так же как и войска его двоюродных братьев Хулагу и Хубилая, беспощадно разрушали все культурные центры завоеванных стран. При этом на Руси не нашлось ученых, которые, сотрудничая с захватчиками, организовали бы в условиях татарского ига центры науки, подобные астрономическим обсерваториям в Мараге или Ханбалыке. Все силы русского народа в это время были направлены на сопротивление захватчикам. Значение этой борьбы для развития мировой науки общеизвестно: ценой огромных потерь Русь остановила татарские орды и спасла от них Европу, создав тем самым возможность дальнейшего развития науки на Западе.

Первые математические сочинения в Западной Европе

В эпоху раннего феодализма и полного господства религии в духовной жизни не было стимулов для научных занятий естествознанием и математикой. В хозяйстве и в быту необходимые математические сведения не выходили за пределы начальных действий с целыми и дробями и правил измерения простейших фигур. Несколько большие требования к математике предъявлялись в монастырях, являвшихся как религиозно-идеологическими, так и крупными хозяйственными организациями; но и здесь интерес к математике ограничивался вопросами практической арифметики и геометрии, а также вычислениями календарей и дней церковных праздников.

Для воспитания образованных людей было написано несколько книг, содержавших начальные сведения о семи «свободных искусствах», разделявшихся на тривиум (трехпутье) и квадравиум (четырепутье) — эта классификация восходила к первым векам Римской империи. Тривиум охватывал грамматику, риторику как искусство красноречия с началами правоведения, и диалектику — в смысле умения вести спор. Квадравиум включал арифметику — изложение без доказательств простейших свойств чисел в комбинации с числовой мистикой, геометрию — краткие сведения об основных геометрических образах и мерах и по географии, астрономии, включая календарь, и, наконец, музыку как учение о гармонических интервалах.

Одним из наиболее популярных в Средние века авторов сочинений по квадравиуму был Аниций Манлий Северин Бозций (ок. 480—524). Бозций был государственным деятелем при дворе остготского короля Теодориха Великого и философом-неоплатоником. Он учился в Афинах в Академии платоников, написал ряд философских сочинений и трактат о музыке. Бозций был казнен по обвинению в государственной измене. В тюрьме он написал очень популярное в Средние века философское сочинение «Утешение в философии». Бозций перевел на латинский язык «Арифметику» Никомаха и часть «Начал» Евклида; в перевод Никомаха он включил числовые примеры, а в книге Евклида довольствовался геометрическими примерами и не приводил строгих доказательств. Популярностью Бозция объясняется то, что ему приписывали и ряд позднейших сочинений.

Из авторов V — VI вв. следует упомянуть также римлян Марциана Капеллу (ок. 450), Флавия Кассиодора (ок. 480 — ок. 575) и епископа Севильи Исидора (ок. 570—636). Сочинение последнего «Происхождения» (Origines) было посвящено разъяснению смысла и происхождения многих научных терминов.

Одним из первых математиков Западной Европы был ирландский монах Беда Достопочтенный (ок. 673—735). Беда был разносторонним ученым. О себе он говорил, что всегда любил либо учиться, либо учить, либо писать. Велики заслуги Беды как историка, но он оставил след и в развитии математики. Беда был автором специального хронологического трактата, значительная часть этого трактата посвящена вычислению для пасхи, с которым жестко связаны многие другие важные христианские праздники. Первый день пасхи устанавливается правилами, которые, по существу, дают решение в целых числах неопределенных линейных уравнений. Главную роль играет требование, чтобы пасха начиналась

в первое воскресенье после полнолуния, приходящегося на день весеннего равноденствия или ближайший вслед за этим день. Определенный день недели (скажем, первое мартовское воскресенье) приходится в разные годы на разные числа, повторяясь с 28-летним циклом (солнечный круг), фазы Луны повторяются с периодом в 19 лет (лунный круг). Поэтому дни пасхалии перемещаются в календаре в некоторой последовательности с периодом в 532 года (великий круг). Мы указали только основные моменты пасхалии, вычисление которой усложнено рядом дополнительных условий. В христианской церкви, в частности, в ирландской и английской, долго шли споры по поводу пасхалии.

В этом же трактате имеется полное описание счета на пальцах. Различные загибы пальцев рук изображали единицы, десятки, сотни и тысячи, а жесты рук позволяли продлить счет до миллиона.

К пальцевому счету восходит характерное для средневековой арифметики, начиная с Бозция, деление чисел на *digiti* (пальцы) — единицы, *articuli* (суставы) — десятки и *numeri compositi* — прочие «составные числа».

При дворе франкского короля Великого, впоследствии объявленного римским императором, работал епископ Алкуин (735—804). Алкуин — уроженец Иорка, ученик друга Беды Достопочтенного. Алкуин был организатором школ и автором ряда руководств. Из них наибольший интерес представляют «Задачи для изощрения ума юншей» (*Propositiones ad asuendos iuvenes*), среди которых имеется ряд задач индийского происхождения.

Вместе с распространением торговли начали завязываться и научные связи с арабской культурой, прежде всего через Испанию и Сицилию, в то время находившиеся в руках арабов.

Одним из первых посетил Испанию, точнее — Каталонию, французский ученый монах Герберт (ок. 940—1003), который был в 999—1003 гг. римским папой под именем Сильвестра II.

В 972—982 гг. Герберт жил в Реймсе, где преподавал в прославленной вскоре школе предметы квадривиума. Кроме математики, логики и философии, Герберт занимался астрономией. Около 994 г. он соорудил в Магдебурге солнечные часы, для чего вел наблюдения над Полярной звездой.

Герберту приписывают несколько математических сочинений, но не известно в точности, он ли их автор.

С большей уверенностью это можно сказать о «Книжке о делении чисел» (*Libellus de numerorum divisione*), с меньшей — о «Правилах счета на абак» (*Regula de abaco computi*). Во всяком случае, оба названных труда, сохранившихся в рукописях более позднего времени, должны быть по содержанию близки к написанным Гербертом. Числа в обеих рукописях пишутся словами или изображаются римскими цифрами. Преимущественно римское влияние отразилось и на третьем, приписываемом Герберту сочинении по геометрии, дошедшем до нас в списках XII в. Здесь изложены простейшие предложения геометрии и правила земледелия, а также приемы вычисления фигурных (многоугольных и пирамидальных) чисел.

Популяризируя сочинения Бозция, фрагменты «Начал» Евклида и практическую геометрию римских агрименсоров, Герберт подходил к основным понятиям геометрии критически. Он указывал, что в действительности ни одна точка, ни одна линия и поверхность не встречаются иначе

чем в связи с каким-нибудь телом. Лишь мысленно мы отрываем точки, линии и поверхности от тел.

Для низкого состояния математической культуры того времени характерно, что среди обвинений, выдвинутых против Герберта, сторонника всемерного усиления церкви и папского престола, было и то, что он владеет умением делить любые большие числа. Это в глазах церкви с несомненностью свидетельствовало о том, что он продан дьяволу.

Абак, о котором писал Герберт, был заимствован у римлян. Во времена Герберта абак представлял собой гладкую доску, посыпанную песком и разделенную на 30 столбцов, из которых три отводились для дробей, а прочие группировались по три столбца, всего в десять групп. Иногда групп столбцов бывало меньше. Сверху столбцы завершались дугами, которые называли пифагоровыми: изобретение абака приписывали Пифагору. В столбцах, повторно помеченных наверху слева направо буквами С (centum — сто), D (decem — десять) и S или M (singularis или monas — единица), клали или писали знаки единиц соответствующих разрядов. В отличие от древних форм счетной доски, единицы изображались не с помощью нескольких камешков, а с помощью особых нумерованных жетонов с их изображениями. Те и другие назывались «апексами» (apices).

Ученик Герберта Рише из Реймса (вторая половина X в.) приписывает своему учителю употребление нумерованных жетонов, вырезанных из рога и имеющих вид, близкий к западноарабским цифрам «губар». Нуль на абак не применялся, так как вместо него оставлялся пустой столбец.

Апексы Герберта имели названия: 1 — игин, 2 — андрас, 3 — ормис, 4 — арбас, 5 — кымас, 6 — кальтис, 7 — зенис, 8 — темениас, 9 — целентис, происхождение которых неясно: если названия апексов 4, 5, 8 близки к соответственным арабским числительным «арба'», «хамс», «саман», то названия апексов 1, 3, 9 близки к венгерским числительным egy, három, kilenc. Позже появился апекс, обозначающий 0, имевший форму нуля. Этот апекс назывался «синос» — то ли от арабского названия нуля «сыфр», то ли от греческого названия счетного камешка φῖφος.

Замена камешков или других однородных марок апексами не представляла преимуществ с точки зрения удобства выкладок, и впоследствии возвратились к помеченным жетонам. Но апексы имели иное значение в развитии математики: в них мы видим ближайших предков современных европейских цифр. Конечно, в течение столетий форма цифр менялась, в частности упрощалась. Тем не менее сходство во многих случаях бросается в глаза.

Распространение позиционной арифметики

Вскоре европейцы начинают пользоваться индийско-арабскими цифрами и в письме. Как уже говорилось, было воспринято в форме cifra и в других производных от нее (ср. стр. 183) и арабское слово «сыфр», обозначающее ноль; впоследствии в ряде языков так стали называть любую из знаков 0, 1, ..., 9 (ср. русское слова «цифра»; от французской формы этого слова chiffre происходит наше слово «шифр»).

В латинских рукописях XII — XIII вв. ноль называется также circulus (кружок), nihil (ничто) или figura nihili (изображение, знак ничего).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>XII век</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>1197г.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>1275г.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>Ок. 1294г.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>Ок. 1303г.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>Ок. 1360г.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
<i>Ок. 1442г.</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Эволюция «арабских цифр»

Возможно, что уже тогда появляется термин *nullus*, т. е. никакой, откуда происходит наше слово «нуль».

Решающее значение для принятия в Европе десятичной позиционной нумерации и новых цифр имело ознакомление, начиная с XII в., с латинскими переводами арабских книг по арифметике, в первую очередь с арифметикой ал-Хорезми. Имя ал-Хорезми в его латинских формах — чаще всего *Algorithmus* или *Algorismus* — превратилось в название новой арифметики, алгоритм или алгоритм (о позднейшем значении слова «алгоритм» см. стр. 212). Примерно тогда же стали говорить об «алгористах», т. е. приверженцах алгористической арифметики, в противоположность «абацистам», как называл вычислителей на абаке еще Герберт.

Распространению новой арифметики содействовало появление чисто светских школ, в которых обучались молодые люди, чтобы затем работать по торговой или финансовой части. По-видимому, первые такие школы появились в Италии. В 1338 г. во Флоренции имелось шесть школ абака (это слово стало означать арифметику в целом), в каждой из которых насчитывалось до 1200 учащихся. Первые монеты с новыми цифрами появились в 1424 г. в Швейцарии, в 1458 г. в Германии, в 1478 г. в Швеции, в 1485 г. во Франции, в 1539 г. в Шотландии, в 1551 г. в Англии. На монетных плитах эти цифры появляются раньше: в Пфорцгейме (Баден) в 1374 г. и в Ульме в 1388 г. Сравнительно позднее появление новых цифр на монетах объясняется тем, что вначале они не имели четко установившейся формы, что могло привести к недоразумениям.

Переводы с арабского и греческого

Огромное значение для прогресса математических знаний в Европе имели, как уже говорилось, переводы с арабского как оригинальных сочинений, так и греческой литературы, имевшейся на арабском языке. Переводами с арабского особенно интенсивно занимались в XII — XIII вв., во изучение арабских рукописей продолжало обогащать европейских математиков и в XV — XVII в.

Распространению знаний содействовали арабские и европейские врачи и астрологи, которых держали при дворах некоторые западноевропейские правители. Но основная переводческая работа велась на территории Пиренейского полуострова, постепенно отвоевываемой испанцами у арабов. Когда в 1085 был взят Толедо, сюда ринулись жаждущие знаний, и через некоторое время здесь под покровительством архиепископа Раймунда I (1126—1151) уже работала целая школа переводчиков и компиляторов. Переводами занимались также в Барселоне и Сеговии. В этом деле принимали участие люди разных национальностей: принявшие христианство арабы (так называемые муджеры), испанцы (в том числе перешедшие ранее в мусульманство, так называемые мозарабы), испанские евреи, англичане, итальянцы, славяне, фламандцы. Результатом явилось создание поистине огромной научной и философской литературы на латыни, которая в течение всего рассматриваемого периода служила в Западной Европе общим языком всех ученых.

При короле Альфонсо X (1226—1284), покровительствовавшем наукам и прозванном Ученым, ряд арабских сочинений по астрономии и прилегающим отраслям знания был переведен в Толедо на испанский язык. Так, под общим названием «Книги астрономических знаний» (*Libros de saber de astronomia*) на испанском языке появился перевод, частью компиляция, целой серии арабских сочинений по астрономии и астрономическим инструментам. Особенную популярность получили так называемые «Альфонсовы таблицы», составленные на основе таблиц астронома XI в. аз-Заркали (известного в Европе как Арзакель).

Одним из первых переводчиков был крупный английский ученый и мыслитель Аделард из Бата, автор ряда философских сочинений, в которых рассматривались и вопросы натурфилософии, а также книги «Правила абака» (*Regula abaci*); позднее он по достоинству оценил позиционную арифметику. Аделард побывал во Франции, Сицилии и на Ближнем Востоке. В 1126 г. он перевел астрономические таблицы ал-Хорезми в обработке ал-Маджрити, ознакомив тем самым европейских ученых с начальными понятиями тригонометрии. Крупной работой явился его перевод с арабского «Начал» Евклида в пятнадцать книг. Быть может, Аделард перевел и арифметический трактат ал-Хорезми. Другой англичанин, Роберт из Честера, перевел в Сеговии в 1145 г. алгебраический трактат ал-Хорезми, положив начало алгебраическим знаниям европейских ученых. Славянский ученый Герман из Далмации, живший в Испании, около 1140 г., перевел с арабского «Планисферий» Птолемея, греческий текст которого утерян, и ряд других сочинений по астрономии и математике.

Иногда переводчики с разных языков работали совместно. Так, испанский философ Доминго Гонзалес сотрудничал с Иоанном Севильским, работавшим в Толедо в XII в. По-видимому, Иоанн переводил с арабского на кастильское наречие, а Гонзалес далее — на латынь. Им принадлежат переводы около двадцати сочинений, преимущественно по астрономии и философии, часть которых была напечатана в XV — XVI вв., обработка арифметического трактата ал-Хорезми.

Итальянец Платон из Тиволи, находившийся около 1134—1145 гг. в Барселоне, переводил совместно с еврейским математиком Абраамом бар Хийя (ок. 1070 — ок. 1136), известным в латинской литературе как Савасорда.

Наиболее выдающимся переводчиком той эпохи был итальянец Герардо из Кремены в Ломбардии (1114—1187). По свидетельству его ученика,

Герардо привлек в Толедо интерес к «Алмагесту», недоступному в Италии. Богатство арабской научной литературы поразило Герардо; он изучил арабский язык и посвятил свою жизнь переводческой деятельности. Переводы Герардо Кремонского относятся к логике и философии, математике и астрономии, алхимии, физике и медицине; число переведенных им с арабского сочинений приближается к девяноста. Он перевел «Начала» и «Данные» Евклида, «Измерение круга» Архимеда, «Конические сечения» Аполлония, «Алмагест» Птолемея, сочинения Феодосия и Менелая, алгебру ал-Хорезми, комментарии к первым десяти книгам «Начал» ан-Найризи, сочинения Сабита ибн Корры, Ибн ал-Хайсама и других. Ряд переводов Герардо был напечатан в XV — XVII вв.

Новый перевод «Начал» Евклида в пятнадцати книгах дал около 1250—1260 гг. математик-астроном Джованни Кампано из Новары (близ Милана). При этом был использован наряду с арабскими источниками более ранний перевод Аделарда из Бата. Кампано дополнил перевод собственными пояснениями и размышлениями, в частности по вопросу о свойствах угла касания, т. е. угла между дугой окружности и касательной в ее конце, а также об общих свойствах непрерывных величин. Вопросы эти оживленно обсуждались в средневековой латинской литературе. Первое печатное издание «Начал», вышедшее в Венеции в 1482 г., воспроизводило перевод Кампано.

Переводы с греческого долгое время были редкостью. Одним из наиболее ранних явился латинский перевод «Алмагеста», выполненный анонимным автором, жившим в Сицилии около 1160 г. Этот перевод, несколько более ранний, чем перевод Герардо из Кремоны с арабского, видимо, не получил известности, и в 1451 г. «Алмагест» был переведен заново, впрочем малоудачно, в Италии греком Георгием Трапезундским (1393—1486). Мы особо упомянем как неутомимого деятеля в этой области фламандца Виллема из Мербеке (ок. 1215—ок. 1286), дважды побывавшего в Греции, одно время в чине архиепископа Коринфа. Помимо переводов из Аристотеля и Прокла, ему принадлежат переводы сочинений Архимеда и Герона. Этот перевод использовал Тарталья в издании трудов Архимеда, вышедшем в Венеции в 1543 г. «Начала» Евклида были впервые переведены на латынь с греческого только Бартоломео Дзамберти в конце XV в. Этот текст опубликован в Венеции в 1505 г.

Первые университеты

Важную роль в развитии математики сыграли университеты. Древнейший в Европе университет — медицинский — был основан в Салерно не позднее первой половины XI в. Около 1100 г. был открыт университет в Болонье, вначале представлявший собой школу, где на основе римского права разрабатывались юридические нормы, интерес к которым возростал вследствие развития городов. На базе нескольких монастырских школ в конце XII в. вырос Парижский университет, где обучались тысячи студентов со всех концов Европы; примерно тогда же был создан Оксфордский и в 1209 г. Кембриджский университеты. В XIV в. появляются университеты в Праге — в 1348 г., в Кракове — 1364 г., в Вене — 1365 г., в Гейдельберге — 1385 г., затем в Лейпциге — 1409 г., в Базеле — 1459 г. и т. д. Все эти университеты, в отличие от первых двух, не были узко-профессиональными школами. Организация преподавания была пример-

но такова: университет состоял из четырех факультетов — искусств, богословия, права и медицины. Студент, нередко подросток, поступал прежде всего на факультет искусств, где обучался около шести лет, и после испытаний мог перейти на какой-либо другой факультет. Наиболее популярным и влиятельным был богословский факультет, где обучение продолжалось около восьми лет и завершалось испытанием и диспутом. Преподаватели делились на младших — бакалавров, магистров — и докторов. Во главе университетов стояли монахи-богословы.

Математике обучали в объеме квадривиума на факультете искусства, а некоторые более тонкие вопросы излагались в курсах философии, особенно после укрепления в конце XIII в. аристотелизма. Впоследствии в курс математического образования включают изложение одной или двух первых книг «Начал», введение в сферическую астрономию, затем лекции по началам оптики, теории движения планет, теории пропорций, учение о широте форм (о котором будет сказано далее). Но в течение нескольких столетий математика оставалась только вспомогательной дисциплиной и отдельных кафедр, да и особых преподавателей математики не было. По-видимому, первым специализировался на преподавании одних математических наук магистр Венского университета Иоганн из Гмундена (ок. 1380—1442). С 1412 г. он читал в Вене лекции по «алгоритму целых и дробей», т. е. по арифметике, основанной на позиционной нумерации, по оптике, сферике, церковно-календарным вычислениям и, позднее, курс астролябии.

Подсобная роль математики в университетах отрицательно сказывалась на знаниях студентов, которые, например, в теоретической геометрии часто не шли далее нескольких первых теорем I книги «Начал». Еще в начале XVI в. в Парижском университете кандидаты на степень магистра искусств вместо сдачи экзамена по геометрии должны были присягать в том, что прослушали лекции по шести первым книгам «Начал». Все же, несмотря на преобладание в преподавании духа авторитарности и схоластики, несмотря на подчиненное положение математики, университеты были важными центрами распространения и развития математических знаний, преимущественно в более отвлеченных направлениях. В недрах самого богословия и схоластической науки шла почти непрерывная борьба между более передовыми мыслителями и ортодоксами. В Оксфордском университете, например, учились и работали такие прогрессивные философы и ученые, как Роберт Гроссетест и его знаменитый ученик Роджер Бекон, призывавшие положить в основание естественных наук опыт и математическую дедукцию. И хотя подготовка математиков не была специальной целью университетов, из них вышли такие замечательные математики, как Томас Брадвардин в Англии, Николь Орем во Франции, Иоганн Мюллер-Регiomонтан в Германии и Николай Коперник в Польше.

Леонардо Пизанский

Первым самостоятельным математиком Западной Европы, полностью осветившим все достижения математиков стран ислама и продвинувшимися дальше их, был итальянец Леонардо Пизанский (1180—1240), известный также под именем Фибоначчи (Fibonacci — сын Боначчи). Леонардо родился в Пизе — крупном торговом центре Италии того времени. Его отец в

конце XII в. торговал в Буджии (Алжир), где Леонардо изучал математику у арабских учителей. Леонардо посетил также Египет, Сирию, Византию и Сицилию.

Основной труд Леонардо — «Книга абака» (*Liber abaci*) — написан им в 1202 г. и переработан в 1228 г. Под словом «абак» Леонардо подразумевает не счетную доску, а арифметику вообще. Эта замечательная книга послужила одним из важных средств распространения новой арифметики и других математических знаний в Европе. Леонардо систематизировал в ней огромное количество сведений, почерпнутых из арабских трудов, добавил, как он выражается сам, кое-что из геометрического искусства Евклида, а по существу — из античного наследия вообще, а также присоединил ко всему этому собственные задачи и методы. Арифметику и алгебру линейных и квадратных уравнений Леонардо изложил с непревзойденной ни ранее, ни долгое время спустя полнотой и глубиной, что отнесется и к латинской и к арабской литературе.

С первых строк Леонардо выступает решительным сторонником методов, которые называет индийскими, в сравнении с которыми «дуги Пифагора», т. е. приемы абацистов, представляются ему отклонением от верного пути.

Всего в книге пятнадцать глав. Первые пять из них посвящены арифметике целых чисел на основе новой нумерации. Чтобы показать читателю ее преимущества, Леонардо приводит таблицу, в которой некоторые числа записаны римскими и здесь же «индийскими» цифрами:

MI	MMMXX	MCXI	...	MMMMCCCCXXI
1001	3020	1111	...	4321

В главе об умножении приводится проверка с помощью девятки, причем «пробой», т. е. остатком от деления на 9 суммы цифр данного числа, у Леонардо может быть и нуль, который тем самым выступает как 1 стоящее число. В главе о делении рассмотрено разложение чисел на простые множители, говорится о признаках делимости на 2, 3, 5, 9, вводится проверка семью и одиннадцатью.

В главах VI и VIII Леонардо учит действиям над смешанными числами и дробями, причем дроби приводятся к общему знаменателю более рациональным образом, чем у арабских математиков, — с помощью нахождения наименьшего общего кратного знаменателей.

В следующих главах (VIII — X) изложены приемы решения задач коммерческой арифметики, основанные на пропорциях. Здесь излагается тройное правило, правило пяти величин, называемое им *figura cata* или *chata* (от арабского «шакл ал-кита'» — «фигура секущих» — названия теоремы Менелая о полном четырехстороннике, формулировавшегося в виде составного отношения, к которому сводится и правило пяти величин), а также правила семи и девяти величин. К этому кругу вопросов у Леонардо примыкают задачи на правило товарищества, т. е. на раздел некоторой суммы пропорционально долям участников, и т. п.

В главе XI рассмотрены задачи на смешение, решение которых дается в форме рецептов. В одной группе задач требуется определить пробу сплава, составленного из известных количеств сплавов данного состава, в другой нужно узнать отношения количеств данных сплавов, дающих вместе сплав данной пробы. Среди этих задач находится и вариант задачи о птицах: 30 птиц стоят 30 монет, куропатки стоят по 3 монеты, голу-

би по 2 и пара воробьев по монете; спрашивается, сколько птиц каждого вида. Леонардо трактует ее как задачу на сплав (сплав достоинства $30:30=1$ должен быть составлен из целочисленных количеств достоинства 3, 2, $\frac{1}{2}$) и приводит единственное целое положительное решение 3, 5, 22. Подробный разбор задачи о птицах с другими числовыми данными Леонардо изложил позднее в письме к состоявшему при дворе императора Фридриха II магистру Теодору.

В XII главе приводятся задачи на суммирование рядов — арифметической и геометрической прогрессий, ряда квадратов и, впервые в истории математики, возвратного ряда. Любопытным примером шуточной задачи, обошедшей многие страны, является задача о 7 старухах, направляющихся в Рим, у каждой из которых по 7 мулов, на каждом из которых по 7 мешков, в каждом из которых по 7 хлебов, при каждом из которых по 7 ножей, каждый из которых в 7 ножнах. Сколько всего предметов? (137 256). Подобная задача встречалась еще в древнем Египте (см. стр. 23).

Возвратный ряд появляется в задаче о кроликах. Спрашивается, сколько пар кроликов родится в год от одной пары, если каждая пара приносит ежемесячно по паре, способной в свою очередь через месяц к размножению, и если ни одна пара не погибает. Ответ дается суммой ряда $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + 144 = 376$, каждый член которого, кроме первых двух, равен сумме двух предыдущих, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Ряд этот теперь носит название «ряда Фибоначчи» и представляет частный случай важного класса возвратных рядов, члены которых выражаются линейными комбинациями нескольких предыдущих.

Отметим также впервые появляющуюся у Леонардо весьма важную и популярную впоследствии задачу о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить все целые веса, меньшие некоторого заданного. Ответ Леонардо 1, 3, 9, 27... основан на том, что всякое целое число можно представить суммой или разностью различных степеней числа 3 и 1.

Большое место занимают у Леонардо различные задачи, приводящиеся к линейным уравнениям, для решения которых он применяет различные приемы: метод одного ложного положения, словесно-алгебраическое решение, приводящее в порядке неполной индукции к формулировке общих правил решения систем некоторого специального вида, наконец, правило двух ложных положений, излагаемое в главе XIII. Многие задачи — восточного или древнегреческого происхождения, так же как и способы решения, в разработке которых Леонардо, однако, пошел вперед.

Леонардо излагает и другой прием решения линейных уравнений, который называет прямым правилом (*regula recta*) и о котором сообщает, что он применяется арабами и заслуживает высокой похвалы, так как с его помощью можно решить бесчисленное множество задач. Прямое правило — это алгебраическое решение, которое Леонардо, подобно восточным математикам, приводит без символики. Незвестную он именует здесь *ges*, т. е. вещью (перевод арабского «шай»). Задача такова: если первый человек получит от второго 7 денариев, то он будет вдесятеро богаче второго; если второй человек получит от первого 5 денариев, он будет всемеро богаче первого. Сколько было у каждого? Леонардо принимает имущество второго за вещь и 7 денариев; тогда первый человек по условию должен иметь 5 вещей без 7 денариев. Если первый даст второму 5 денариев, то у первого останется 5 вещей без 12 денариев, а у второго будет вещь и 12 денариев. Таким образом, вещь и 12 денариев в семь раз

Больше, чем 5 вещей без 12 денариев, откуда 34 вещи составляют 96 денариев, одна вещь есть $2\frac{14}{17}$ денариев и т. д. Далее решаются задачи с более чем двумя участниками. Имеются специальные примеры «неразрешимых вопросов», условия которых приводят к противоречиям.

Леонардо применяет алгебраическое решение и к другой популярной в Средние века группе задач, в которых требуется определить имущество нескольких человек, причем каждый из них может купить некий предмет, только сложив свою наличность с теми или иными долями капиталов других. Стоимость предмета в них, кроме одной, не указана, так что задачи являются неопределенными, но эта неопределенность устраняется, так как требуется найти решение в наименьших целых числах.

Леонардо рассматривает задачи с двумя, тремя и четырьмя участниками. В последнем случае его задача сводится к системе уравнений вида

$$x_1 + \frac{a_1}{b_1} x_2 = s,$$

$$x_2 + \frac{a_2}{b_2} x_3 = s,$$

$$x_3 + \frac{a_3}{b_3} x_4 = s,$$

$$x_4 + \frac{a_4}{b_4} x_1 = s.$$

Леонардо словесно формулирует общий регулярный прием решения таких систем. Мы не будем приводить словесного правила Леонардо, весьма, впрочем, краткого и ясного, — в нем речь идет о действиях над числителями и знаменателями следующих по порядку коэффициентов неизвестных. Ограничимся лишь выражением первого неизвестного через параметр s :

$$x_1 = \frac{\{(b_1 - a_1)b_2 + a_1a_2\}b_3 - a_1a_2a_3\}b_4}{b_1b_2b_3b_4 - a_1a_2a_3a_4} s.$$

У Леонардо s принят равным знаменателю, и речь идет поэтому только о составлении числителя. Этот алгоритм Леонардо явился выдающимся достижением XIII в. По сравнению с древнекитайским методом фан-чэн алгоритм Леонардо выгодно отличается формулировкой окончательного правила выражения неизвестных.

Далее задачи усложняются. Задача Леонардо

$$x + \frac{1}{3}(r + y) = s,$$

$$y = \frac{1}{4}(x + r) = s,$$

$$r + \frac{1}{5}(x + y) = s$$

точно совпадает с задачей I, 24 «Арифметик» Диофанта; следующая аналогичная задача с четырьмя неизвестными в каждом уравнении отличается у Леонардо от задачи I, 25 Диофанта только частью коэффициентов. Последняя задача есть у ал-Караджки, и не исключено, что Леонардо взял ее из «Ал-Фахри», хотя в целом эта группа задач, несомненно, встретилась ему в Византии. Как бы то ни было, Леонардо самостоятельно разработал новые алгебраические приемы их решения.

С исследованием линейных уравнений связана другая выдающаяся заслуга итальянского математика. Рассматривая некоторые невозможные задачи этого рода, он — первый в Европе — пришел к мысли о введении отрицательных чисел и их толковании как долга.

В XIV главе Леонардо на числовых примерах разъясняет способы приближенного извлечения квадратного и кубического корней. В первом случае он либо пользуется предварительным умножением подкоренного числа на 10^{2n} , либо применяет итерационный алгоритм, причем, как и его предшественники, Леонардо останавливается на третьем приближении.

Правило извлечения кубического корня по приближению

$$\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a(a+1)+1}$$

Леонардо считает своим изобретением, откуда видно, что он не был знаком с арифметическими трактатами Кушьяра ибн Лаббана и ан-Насави. В случае кубических корней Леонардо ограничивается этим вторым приближением, которое часто обеспечивает неплохую точность. Например, $\sqrt[3]{900} \approx 9 + \frac{171}{271}$, т. е. $\approx 9,631$, причем Леонардо заменяет еще $\frac{171}{271}$

на $\frac{2}{3} \approx 0,667$; между тем верное с четырьмя знаками значение будет 9,655.

За извлечением квадратных корней следуют задачи на действия с квадратными иррациональностями, свидетельствующие о том, что Леонардо хорошо владел материалом X книги «Начал».

Наконец, в XV книге собран ряд задач геометрии на применение теоремы Пифагора и большое число примеров на квадратные уравнения, решаемых с помощью «алгебры и алмукабалы». Здесь Леонардо существенно опирается на арабскую литературу. Он рассматривает те же шесть канонических форм уравнений, что и ал-Хорезми, к которым через ряд промежуточных звеньев восходит и одно из взятых Леонардо для образца уравнений, именно $x^2 + 10x = 39$. Многие задачи заимствованы из «Книги измерений» Савасорды и особенно из алгебраического трактата Абу Камила, но Леонардо предлагает и собственные задачи.

Изложение у Леонардо — словесное, но в текст вкраплены обозначения одной или двумя буквами отрезков, изображающих данные и искомые величины или их комбинации. Квадрат неизвестной называется census — имущество, состояние, ценз, quadratus — квадрат, неизвестная — res — вещь или radix — корень, данное число — numerus или denarius; это латинские переводы арабских терминов: мал, мурабба', шай, джизир, 'адад, динар. К новым квадратным уравнениям Леонардо относится

$$x^2 = \sqrt{6x} \sqrt{5x} + 10x = 20.$$

Найдя его корень

$$x = 5 + \sqrt{7 \frac{1}{2}} + \sqrt{52 \frac{1}{2} + \sqrt{750}},$$

Леонардо считает нужным сообщить, что оно приближенно равно $16\frac{2}{3}$ (с точностью до сотых $x = 16,68$).

Среди систем с двумя неизвестными, решаемых Леонардо, также немало новых вроде

$$x + y = 10, \quad \frac{xy}{x - y} = \sqrt{6},$$

где

$$x = 5 - \sqrt{6} + \sqrt{31}, \quad y = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{31}.$$

Но особенно интересно новое решение системы

$$x + y = 10 \quad \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 6 \frac{1}{4},$$

имевшейся и у Абу Камила. В анализе этой задачи у обоих авторов много общего. Например, оба они подробно обосновывают равенство произведения и суммы частных от деления любого числа на две его части, т. е.

$$\frac{a}{x} \frac{a}{y} = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$$

при $a = x + y$. Но Абу Камил, заменив во втором уравнении 10 на $x + y$, сводит дело к уравнению, квадратному относительно y/x . Леонардо же полагает одну часть (x) равной $2 - z$, так что другая (y) есть $8 + z$; тогда $(2 - z)(8 + z) = 16$. «Действуй согласно алгебре (secundum algebra), — говорит Леонардо, — и найдешь, что вещь есть нуль (invenies rem esse nihil), так что одна из двух частей будет 2, а другая 8»¹. Это, кажется, первый случай употребления корня, равного нулю, к нему вновь пришли столетия спустя. Второй отрицательный корень — 6 Леонардо здесь, естественно, оставил без внимания. Любопытно, что данной задачей и ее числовыми вариантами заканчиваются и алгебраический трактат Абу Камила и «Книга абака».

«Книга абака» резко возвышается над арифметико-алгебраической литературой XII—XIV вв. разнообразием и силой методов, богатством задач, доказательностью изложения. В предисловии Леонардо писал, что предпринял труд, дабы «род латинян» не пребывал более в незнании излагаемых в нем вещей. Но это был труд не для учащихся и не для тех, кто ожидал от математики одних правил решения, стандартных вопросов коммерческого дела и т. п. «Книга абака» оказалась по плечу ученым, отчасти современникам, но еще более потомству.

Последующие математики широко черпали из нее как задачи, так и приемы решения, которые в XV—XVI вв. разошлись по многочисленным итальянским, немецким, французским, английским и русским рукописям и печатным книгам. Задачи Леонардо переходили из одних сочинений в другие, их можно встретить и в знаменитой «Алгебре» Эйлера (1768) и много позднее.

Большое значение имели для развития математики и другие труды Леонардо. В 1220 г. он написал «Практику геометрии» (Practica geometriae) — книгу, которая, вопреки своему названию, не была руководством специально по прикладной землемерной геометрии, а содержала разнообразные теоремы (с доказательствами), относящиеся к измерению величин, к арифметике, планиметрии и стереометрии. Кроме результатов, известных из древности, имеются и принадлежащие самому Леонардо или снабженные оригинальными доказательствами. Так, он не просто приводит утверждение, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке (что было

¹ Leonardo Pisano. Capitulum quintum decimum de regulis geometriae pertinentibus et de quaestionibus algebrae et almuchabile... В кн.: G. Libri. Histoire des sciences mathématiques en Italie, v. 2. Paris, 1838, p. 470.

известно еще Архимеду), а доказывает его. Не встречается у Евклида теорема Леонардо о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда. С собственно геометрическими предложениями переплетается изложение некоторых землемерных приемов в последнем, седьмом разделе книги. Здесь же Леонардо учит определению расстояний и высот с помощью определенным образом размеченного квадрата. Имеются и задачи на деление фигур. В целом книга несет печать влияния как греческой, так и арабской литературы. При определении π Леонардо вычисляет периметры правильных вписанного и описанного 96-угольников и получает неравенства

$$\frac{1440}{458 \frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458 \frac{1}{5}}.$$

Арифметическое среднее $\frac{4}{9}$ и $\frac{1}{5}$ есть $\frac{29}{90}$ или почти $\frac{1}{3}$, и за π принимается

$$\frac{1440}{458 \frac{1}{3}} = \frac{864}{275}, \text{ что равно } 3,1418...$$

Упомянем еще геометрические задачи, решаемые с помощью алгебры, именно приведением к квадратным уравнениям; такие задачи встречаются и в других сочинениях Леонардо. Некоторые вопросы (например, о вписании в квадрат, а также в равносторонний или в равнобедренный треугольник правильного пятиугольника) непосредственно примыкают к упомянутому ранее труду Абу Камыля о пятиугольнике и десятиугольнике. Иррациональные корни возникающих при этом квадратных уравнений Леонардо вычисляет с высокой степенью приближения в шестидесятичных дробях (до кварт).

Особняком стоит в конце «Практики геометрии» задача об отыскании квадратного числа, в сумме с числом 5 дающего квадратное число; ею занимались ранее математики стран ислама.

Около 1225 г. Леонардо написал «Книгу квадратов» (Liber quadratorum), содержащую задачи на неопределенные квадратные уравнения. В одной задаче, предложенной ему магистром Иоанном Палермским, философом императора Фридриха II, в присутствии последнего, требовалось найти (рациональное) квадратное число, которое, будучи увеличено или уменьшено на 5, вновь дает (рациональные) квадратные числа. Леонардо был, вероятно, знаком с приемами решения таких задач в арабской литературе, но он применил собственный прием, исходя из того, что всякое квадратное число n^2 является суммой первых n нечетных чисел, и используя взятую полученные им формулы суммирования последовательных четных и нечетных натуральных квадратов.

В другой задаче требуется найти числа x, y, z такие, чтобы каждая из сумм $x + y + z + x^2$, $x + y + z + x^2 + y^2$, $x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$ была квадратным числом. Он дает решение $x = \frac{11}{5}$, $y = \frac{48}{5}$, $z = \frac{144}{5}$. Эта работа Леонардо — единственное ценное исследование по теории чисел в Европе за рассматриваемый период.

Иоанн Палермский предложил Леонардо еще одну трудную задачу — решить кубическое уравнение

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

о которой идет речь в трактате «Цветок» (Flos). Сначала доказывается, что x не может быть целым (положительным) числом, поскольку из

$$x_4^3 + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2$$

следует, что x меньше 2, а $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$. Но x также не может быть (рациональной) дробью, равно как и квадратным корнем рационального числа. В последнем случае, поскольку наше уравнение можно переписать как $x = \frac{20 - x^2}{10 + x^2}$, иррациональное число x было бы равно рациональному. Затем Леонардо показывает, что x не может также иметь вида ни одной из иррациональностей, встречающихся у Евклида, и приводит приближенное решение в шестидесятиричных дробях $x = 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40$, не указывая, однако, способа, которым он его получил. Этот замечательный по точности результат только примерно на $1\frac{1}{2}$ сексты, т. е. на $3 \cdot 10^{-11}$, превосходит истинное значение корня. Доказательство невозможности решения кубического уравнения при помощи квадратных иррациональностей было, несмотря на свою неполноту и отсутствие общности, первым шагом вперед в исследовании вопроса о решении кубических уравнений в радикалах.

Иордан Неморарий

Современником Леонардо Пизанского был Иордан Неморарий, математические сочинения которого пользовались большой известностью, хотя по оригинальности и богатству содержания они значительно уступали сочинениям Леонардо. О личности Иордана точных сведений не имеется. Возможно, что это был не кто иной, как Иордан Саксонский — второй по счету генерал монашеского ордена доминиканцев, уроженец Германии, одно время живший в Париже и умерший в 1237 г. Иордан Неморарий был выдающимся механиком и математиком, автором многих сочинений по арифметике, алгебре и геометрии.

В «Арифметике, изложенной в 10 книгах» (*Arithmetica decem libris demonstrata*) Иордан следует в основном позднеантичной традиции Никомаха и Боэция, излагая общие арифметические свойства чисел. Интересной особенностью этого труда является применение для общности букв вместо конкретных чисел. Сам по себе такой прием не был новым, но Иордан Неморарий применяет его более систематически, чем его предшественники. При формулировке предложений или правил решения задач он не выражает величины с помощью отрезков и прямоугольников, и поэтому буквенный символ выступает у него как чисто арифметический знак произвольного числа. Еще у Леонардо буквенное обозначение относилось по большей части одновременно к величине и представляющему ее геометрическому образу и, собственно, переносилось со второго на первую. Далее, Иордан регулярно обозначает каждую величину одной буквой и не колеблется более между употреблением то одной, то сразу двух букв, как Леонардо. Вместе с тем у Неморария по-прежнему отсутствуют знаки равенства и алгебраических операций (лишь вместо нашего $a + b$ он пишет ab), благодаря чему он вынужден применять для результатов каждого отдельного действия все новые и новые буквенные обозначения.

Этот же прием, как мы сейчас увидим, Иордан использовал в своей алгебре. Алгебра Иордана, сочинение «О данных числах» (*De numeris*

dati) состоит из четырех книг и содержит 115 задач на линейные и квадратные уравнения и их системы.

Некоторые задачи Неморария и Леонардо совпадают, но в целом их изложение алгебры отличается и составом задач и приемами решения. Неморарий отвлекается от конкретного содержания задач, которые все у него представляют собой отвлеченные числовые примеры; он оставляет в стороне какие бы то ни было приложения к геометрии или коммерческой арифметике и т. д. Трактат «О данных числах» — это, так сказать, университетский курс абстрактной алгебры XIII в., построенный на основе методически расположенных примеров, которые решаются в общем виде, а затем иллюстрируются числовыми образцами. Название сочинения связано с тем, что в примерах при задании некоторых чисел оказываются данными другие, зависящие от них.

В I книге трактата собраны задачи второй степени с двумя неизвестными. Исходными являются задачи

$$\text{№ 1 } \begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b, \end{cases} \quad \text{№ 3 } \begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{№ 5 } \begin{cases} x - y = a, \\ xy = b, \end{cases}$$

правила решения которых сформулированы чисто словесно. Последние две системы не приводятся к квадратному уравнению, но с помощью несложных преобразований сводятся к системе № 1, линейной. К этим трем системам сводятся, далее, другие, в которых данными являются, помимо суммы или разности искомых чисел, различные комбинации из квадратов, отношений и т. д. Задача № 7, непосредственно выражающаяся квадратным уравнением $x^2 + ax = x(x + a) = b$, приводится здесь к системе № 5. Во многих числовых примерах первое условие есть $x + y = 10$, как у ал-Хорезми, Абу Камилы и, добавим, Леонардо Пизанского. Но ход решения у Иордана другой: все названные авторы сводили такие системы к квадратному уравнению. Задачи книги II, выраженные в основном с помощью пропорций, представляют собой линейные уравнения, начиная с простейших и кончая системами с четырьмя неизвестными.

В книге III рассмотрены задачи на пропорции, а в книге IV среди прочего даны правила решения трех типов квадратных уравнений при помощи дополнения до квадрата. Характерно, что и здесь задачи № 21—22 на системы

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ x^2 y^2 = b, \end{cases}$$

посредством извлечения квадратного корня сводятся к задачам № 3 и 5 книги I, а не к квадратным уравнениям.

Геометрии посвящены четыре книги сочинения «О треугольниках» (*De triangulis*). Вначале в них даются определения понятий, характер которых виден на таком примере: «Непрерывность есть неразличимость границ совокупно с возможностью разграничений». Эти слова представляют собой некий вариант определения в «Физике» Аристотеля. В первых двух книгах изложены теоремы о различии прямоугольных, остроугольных и тупоугольных треугольников по соотношениям длин противоположных сторон и медиан, о делении отрезков и фигур, ограниченных прямыми линиями. Например, дается оригинальный способ деления треугольника на три равных, фактически — построение его центра тяжести и т. п. В работе заметно влияние греческих и арабских источников.

Развитие физики

На протяжении XIII и XIV вв. в английских и французских университетах видное место заняла разработка вопросов физики, причем отправным пунктом служили натурфилософские сочинения Аристотеля и его последователей на арабском Востоке. Особенное внимание привлекали механика, с одной стороны, и некоторые свойства тепловых, оптических и иных явлений — с другой.

Одним из пионеров этого движения был английский философ и ученый Роберт Гроссетест (ок. 1175—1253) (grosseteste — большоголовый), епископ Линкольнский. Роберт получил образование в Оксфорде и, быть может, в Париже, а затем был лектором и первым канцлером Оксфордского университета. Другим, еще более прославленным лидером явился ученик Гроссетеста Роджер Бекон (ок. 1214—1294), воспитывавшийся в Оксфорде и Париже и преподававший в обоих университетах. Оба они обладали огромной эрудицией, почерпнутой главным образом из сочинений греческих и арабских авторов, и были знатоками Аристотеля. Деятельность Гроссетеста и Бекона обняла всю совокупность знаний. Они писали по астрономии, по оптике, бывшей тогда важнейшей из физических наук, о календаре, подчеркивая необходимость его реформы, которая, впрочем, была произведена гораздо позднее. «Главный труд» (*Opus majus*) (1266—1267) Бекона представлял собой вместе с двумя приложениями подлинную энциклопедию наук XIII в., включая географию, алхимию и т. д.

Мировоззрение Гроссетеста и Бекона было ограничено, ибо они подчиняли философию догматам религии, но они смело вносили новый дух более свободного исследования, более критического отношения к признанным тогда авторитетам натурфилософии. Бекон под конец жизни пополнился за это, как и за смелое обличение испорченных нравов духовенства и высших сословий, многолетним тюремным заключением. Гроссетест и с еще большей силой Бекон отстаивали ту новую для их времени мысль, что познание физического мира должно основываться на наблюдении и опыте, а не на текстах, одобренных церковью. Наконец, оба мыслителя высоко ценили математику, как главное пособие физики. Предвосхищая Галилея, Гроссетест писал: «Все принципы природных действий должны быть даны посредством линий, углов и фигур»¹. Бекон в IV части «Главного труда», носящей характерное заглавие «О пользе математики», восхваляет эту науку, называя ее вратами и ключом к другим наукам. Из трудов Бекона видно, что он был знаком с «Началами» и «Оптикой» Евклида, «Оптикой» и «Алмагестом» Птолемея, рядом результатов Архимеда, Аполлония, Зенодора и т. д.

Дело не ограничивалось декларациями. Бекону принадлежит, например, правило, выражающее степень интенсивности смеси двух количеств с разными интенсивностями, формально совпадающее с калориметрической формулой, вновь найденной и экспериментально проверенной в XVIII в. Г. В. Рихманом. Более сложные вопросы математики находили применение в оптике, основывавшейся на переводе знаменитого труда Ибн-ал Хайсама. Это особенно хорошо видно из «Оптики» (*Optica*) польского ученого Витело (ок. 1225 — ок. 1280), который обучался около 1250 г. в Париже и был другом упоминавшегося ранее переводчика Виллема из Мербеке.

¹ См. В. П. Зубов. Из истории средневековой атомистики. Труды Института истории естествознания, 1947, т. I, стр. 293.

Внимание к учению о бесконечном и континууме привлекали проблемы атомистики, которой отведено такое важное место в сочинениях Аристотеля и на которую опирался в своей оптике Ибн ал-Хайсам. И здесь одним из зачинателей в средневековой Европе был Гроссетест, сам стоявший на позициях математического атоизма. У него мы встречаем по крайней мере постановку вопроса о сравнении различных бесконечностей вроде сумм некоторых простых (расходящихся) рядов.

Экспериментальная основа физики XIII в. была ничтожна. Мечта Бекона об экспериментальной науке — сам термин *scientia experimentalis*, кажется, принадлежит ему — смогла быть осуществлена в сколько-нибудь широком масштабе много позднее. Через столетия были разработаны и основы математического аппарата нового естествознания. Вместе с тем ранние попытки математизации физики обусловили развитие нескольких математических теорий, таких, как учение об отношениях, учение о континууме и весьма своеобразное учение о широтах форм.

Томас Брадвардин

Во всех этих направлениях заслуживающие внимания результаты (в теории континуума, в частности) были получены выдающимся английским мыслителем, магистром Томасом Брадвардином (ок. 1290—1349), который учился и преподавал в Оксфордском университете, а под конец жизни стал архиепископом Кентерберийским. Брадвардину принадлежат три сочинения по математике и одно по механике. Наименьший интерес представляет «Теоретическая арифметика» (*Arithmetica speculativa*) — сокращение арифметики Боэция. Более оригинальна «Теоретическая геометрия» (*Geometria speculativa*), состоявшая из четырех отделов, каждый из которых открывался соответствующими определениями. В первом отделе рассматриваются звездчатые многоугольники, получаемые из правильных выпуклых многоугольников (начиная с пятиугольника) путем продолжения их сторон до пересечения. Из этих звездчатых многоугольников первого порядка (начиная с семиугольника) Брадвардин образует звездчатые многоугольники второго порядка и т.д., всякий раз увеличивая число вершин на две. Брадвардин установил, что сумма острых углов звездчатого пятиугольника равна двум прямым и увеличивается каждый раз на два прямых с каждой новой вершиной. Исследование звездчатых многоугольников представляет собой самостоятельный вклад Брадвардина в науку. Сумма углов звездчатого пятиугольника была найдена несколько ранее Джованни Кампано в комментариях к его переводу «Начал» Евклида.

Во втором отделе Брадвардин занимается изопериметрическими свойствами многоугольников, круга и шара, следуя основанному на труде Зенодора анонимному латинскому переводу с арабского. Третий отдел посвящен учению о пропорциях. Здесь говорится об иррациональности $\sqrt{2}$ как отношения диагонали квадрата к его стороне, упоминается «Измерение круга» Архимеда как сочинение, изобилующее трудными и сложными местами, — из него приводятся теоремы о равенстве круга прямоугольному треугольнику со сторонами, равными полуокружности и полудиаметру, а также приближение $\pi \approx 22/7$. В четвертом отделе речь идет о существовании только пяти правильных многогранников и рассматривается, со ссылкой на Аверроэса, вопрос о заполнении пространства теми или иными

правильными телами (Аверроэс неправильно полагал, что такое заполнение возможно не только с помощью кубов, но и с помощью других тел); некоторые предложения о кругах на сфере примыкают к Феодосию.

Большое место во втором отделе «Теоретической геометрии» занимает обсуждение проблемы угла касания. Для Бравардина, как и для Кампано, угол касания есть величина, находящаяся к прямолинейным углам в некоем иррациональном отношении, характер которого, однако, отличен от иррационального отношения диагонали и стороны квадрата.

«Теоретическую геометрию» Бравардина высоко ценили математики XIV—XV вв. Она была напечатана почти через полтора столетия после его смерти, в 1495 г., и выдержала вскоре еще два издания. Руководство Бравардина по арифметике печаталось, начиная с 1495—1496 гг., 12 раз.

В «Трактате об отношениях или об отношениях скоростей при движениях» (*Tractatus proportionum seu de proportionibus velocitatum in motibus*, 1328) наибольший интерес представляет попытка Бравардина математически выразить зависимость между скоростью v , движущей силой F и сопротивлением R . Английский ученый подвергает критике положение перипатетиков, согласно которому, говоря по-современному, скорость пропорциональна отношению движущей силы к сопротивлению. Мы оставим в стороне остроумные доводы, отчасти предвосхищающие позднейшую аргументацию Галилея, как и то обстоятельство, что сами понятия скорости и силы оставались весьма неясными. Существенно, что Бравардин приходит к новому закону скорости, по-своему толкуя текст Аристотеля. По Аристотелю, при удвоении, утроении и т. д. отношения F/R соответственно удвоится, утроится и т. д. скорость. Бравардин считает, что здесь должно иметь место образование составного — двойного, тройного и т. д. — отношения, другими словами, что

$$\frac{F}{R} = n^v.$$

В связи с вопросами механики подробно излагается учение о составных отношениях, причем Бравардин приближается к идее дробных показателей степени. Если в прежней теории отношений оперировали двойными, тройными и другими целыми отношениями, соответствующими возведению в квадрат, куб и т. д., то Бравардин вводит «половинное» отношение, соответствующее $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. Он не знал, что имел в этом далекого предшественника в лице Архимеда, говорившего о «полуполторном» отношении $\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3}$. Под влиянием Бравардина учение о дробных отношениях вскоре получило широкое развитие у Н. Орема.

«Трактат о континууме» (*Tractatus de continuo*), написанный между 1328 и 1335 гг., посвящен учению о непрерывном и дискретном, лежащему на границе между физикой, математикой и философией. Европейским ученым из трудов Аристотеля и арабских философов были известны различные точки зрения на вопрос о строении континуума. Бравардин насчитывает пять концепций, распространенных ранее и в его время.

«Одни, — пишет он, — как Аристотель, Аверроэс и большинство нынешних, утверждают, что континуум не составляется из атомов, но из частей, которые делимы без конца. Другие же говорят, что он составляется из неделимых, притом двояко, ибо Демокрит полагает, что континуум составляется из неделимых тел, а другие, — что из точек. И эти разделяются надвое, ибо Пифагор, глава этого направления, Платон и наш современ-

менник Вальтер полагают, что континуум составляется из конечного числа неделимых, а другие, — что из бесконечного числа. И эти последние делятся надвое, ибо одни, как наш современник Генрик, утверждают, что континуум составляется из бесконечного числа неделимых, непосредственно связанных друг с другом, а иные, как Роберт Линкольнский, — из бесконечного числа их, связанных друг с другом опосредованным образом¹.

Упоминаемые Браввардином современники — это англичане Уолтер Кеттон (ум. 1342), оксфордский ученый Генри Харклей (ум. 1371) и Роберт Гроссетест. И Роджер Бекон занимался этими вопросами, стоя на стороне перипатетиков. Против мнения, что континуум составлен из неделимых частей, он выдвигал вслед за древними такое соображение. Если плоскость состоит из точек, то диагональ квадрата равна его стороне, так как обе состоят из одинакового числа точек. Но диагональ не равна стороне и, значит, плоскость не состоит из точек.

Браввардин также отстаивает концепцию Аристотеля. Аргументация его подробна и во многом оригинальна. Книга начинается с определений, за которыми следуют предположения и заключения, доказываемые, как теоремы. Континуум есть количество, части которого взаимно связаны. Отдельно определяются пребывающий континуум и его виды — тело как континуум, пребывающий и обладающий длиной, шириной и глубиной, поверхность, линия. Время есть последовательный континуум, измеряющий следование. Даются определения точки как неделимого, обладающего положением, и мгновения. Движение есть прохождение пространственного континуума во временном. Проводится различие между видами бесконечности: категорематической и синкатегорематической. Если отвлечься от некоторых оттенков мысли, то первая из них есть актуальная, трансфинитная, а вторая — потенциальная бесконечность, которая происходит из конечной величины неограниченным увеличением, подобно тому как растут последовательные натуральные числа.

Свою позицию Браввардин формулирует в словах: «Утверждение, полагающее, что континуум состоит из конечного числа неделимых, враждебно всем наукам, всем им противоборствует и потому всеми ими единодушно отвергается»². Из множества аргументов против финитно-атомистической концепции укажем один — от опыта. Если представить себе, что число точек диаметра окружности конечно, например 10, то столько же точек будет в полуокружности, что ясно, если восставить в каждой точке диаметра перпендикуляр. Получается, что длина окружности вдвое больше диаметра. В противовес этому Браввардин выдвигает несколько теоретических доводов, но этим не ограничивается и ссылается на плотников, каменщиков и всех других мастеров, опыт которых показывает ложность подобного заключения.

Критикуя инфинитно-атомистическую концепцию, Браввардин стремится показать, что из нее вытекают противоречивые следствия. Он строит примеры, в которых устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами бесконечных множеств. Так, берутся совокупности точек двух разных отрезков: s и f , $s > f$, проходимых (с разными скоростями) за одно время h . Тогда каждому мгновению будет соответствовать по одной точке в каждом отрезке, и, следовательно, точек в них поровну. Если же

¹ См. В. П. Зубов. Трактат Браввардина «О континууме». «Историко-математические исследования», 1960, вып. 13, стр. 402—403.

² Там же, стр. 441.

прообразы идей функциональной зависимости и ее графического изображения, — кристаллизация соответствующих понятий и методов произошла только в XVII столетии.

Истоки этого направления, сложившегося в Оксфорде и Париже, были связаны со спорами о логико-философском понятии «формы» и ее изменениях, восходящем к Аристотелю. Шотландский философ-номиналист Дунс Скотт (ок. 1265—1308), названный Марксом «первым выразителем материализма в Средние века», понимал под формой как бы чувственно воспринимаемое качество вещей, существующих ранее общих понятий. Выступая против так называемых реалистов, последователей Фомы Аквинского (1225—1274), он защищал множественность форм, их изменчивость, отличая при этом интенсивность, или усиление (*intensio*), формы от ее ремиссии, или ослабления (*remissio*).

Довольно широкое развитие в математическом и натурфилософском плане новое учение получило в «Книге калькуляций» (*Liber calculationum*) воспитанника Оксфордского университета Ричарда Суайнсхеда или Суинсета (ок. 1350). Интенсивность формы выступает как переменная интенсивность качества, например как степень (*gradus*) теплоты или холода, разреженности или плотности, как скорость механического движения и т. п. При этом впервые появляется понятие о мгновенной, или точечной, скорости (*velocitas instantanea, velocitas punctualis*), между тем как ранее скорость рассматривалась только за какой-либо конечный промежуток времени. Впрочем, этому новому понятию не дается четкого определения, и оно, по существу, рассматривается как интуитивно очевидное; к тому же наше современное определение было тогда немислимо. Дело в том, что и в древности, и в Средние века ставили в отношении между собой лишь однородные величины и потому нельзя было относить путь ко времени: для сравнения скоростей двух движений сопоставляли либо пути, пройденные за одно и то же время, либо времена, за которые проходились один и тот же путь. Появляется также понятие об ускорении как интенсивности скорости или же движения; французский математик Н. Орем, младший современник Суайнсхеда, ввел для ускорения специальный термин *velocitatio*. Эти новые идеи применяются к изучению неравномерных движений. Синтез кинематической и математической мысли имел в теории калькуляций основное значение. Плодом его было выделение идеи функциональной зависимости, которая до того существовала только в скрытом виде. «Вся кинематика, — замечает Н. Бурбаки, — опирается на интуитивную, а в некотором роде и экспериментальную концепцию изменяющихся во времени величин, т. е. функций времени»¹. Одновременно понемногу вызревает представление о законах природы, как законах функционального типа.

С помощью не всегда ясных рассуждений Суайнсхед анализирует примеры изменения интенсивностей. Анализ этот носит чисто абстрактный характер, и ни исходные посылки, ни результаты не связываются с реальными количественными измерениями, с данными эксперимента или наблюдения. Так, Суайнсхед говорит, что при равномерном росте интенсивности средняя интенсивность на некотором промежутке есть средняя арифметическая начальной и конечной интенсивностей. Этот результат

¹ Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. Перевод И. Г. Батмаковой под ред. К. А. Рыбникова. М., 1963, стр. 202.

равносилен интегральной формуле (скорость $v = kt$)

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} kt dt = \frac{kt_2 + kt_1}{2} = \frac{v_2 + v_1}{2};$$

в механике ему соответствует вычисление пути равномерно ускоренного движения. В другом случае находится средняя интенсивность при более сложном условии: интенсивности на последовательных участках промежутка, разбитого в геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$, растут в арифметической прогрессии 1, 2, 3, ... Тогда, согласно Суайнсхеду, средняя интенсивность равна интенсивности на втором из этих дробных промежутков. Мы можем выразить этот результат суммой бесконечного ряда

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 3 + \dots = 2,$$

впервые встречающегося в схоластической литературе; греки знали только бесконечную убывающую геометрическую прогрессию. Говоря об изменении качества, Суайнсхед иногда пользуется термином «течение (fluxus) качества»; слово «течение» и его модификации впоследствии вошли в литературу по геометрии и исчислению бесконечно малых XVI—XVII вв., особенно в «методе флюксий» Ньютона (ср. современное название «текущие координаты»).

Труд Суайнсхеда издавался трижды: в Падуе около 1477 г., Павии в 1498 г. и Венеции в 1520 г. Имя Суайнсхеда пользовалось известностью еще в XVII в. В двух письмах 1670 и 1696 гг. Лейбниц отзывался о нем, как об одном из первых ученых, применивших математику в физике и введших математику в схоластическую философию.

В одно время со Суайнсхедом теорию калькуляций в Оксфорде успешно разрабатывали У. Хейтесбери и Дж. Дамблтон.

Николь Орем

Подобно Англии, и Франция выдвинула в XIV в. замечательного математика, значительно превосходившего своих современников, магистра Николь Орема (ок. 1323—1382). Орем преподавал в 1348—1361 гг. в одном парижском коллеже, затем жил главным образом в Руане, а с 1377 г. был епископом в Лизье. Орем — чрезвычайно яркий человек, живо откликавшийся на злободневные вопросы своей эпохи. Он был одним из зачинателей научной литературы на французском языке и дал ряд переводов сочинений Аристотеля; по-французски он написал «Трактат о сфере» (Traité de l'esphère), в котором весьма обогатил французскую научную терминологию. Он выступал против злоупотреблений церкви, против астрологии и гаданий, хотя сам еще верил в магию. Ряд трудов Орема относится к астрономии и механике.

Для нас прежде всего интересна разработка Оремом теории отношений, которой он посвятил два сочинения: «Трактат об отношениях» (Tractatus proportionum), составленный около 1350 г. и напечатанный около 1500 г. и затем в Венеции в 1505 г. и «Алгоритм отношений» (Algorismus proportionum). В первой части последнего труда Орем вводит наряду с двойным,

тройными, вообще n -кратными отношениями четвертные, полуторные и другие дробно-рациональные отношения, которые соответствуют нашим $a^{1/2}$, $a^{1/4}$, $a^{3/2}$ и т. п. Исходя из того, что $8 = \sqrt[3]{64}$, $4 = \sqrt[3]{64}$, он заключает, что 8 находится в полуторном отношении к 4 (в современной записи $8 = 4^{3/2}$), что записывает $\left[\frac{p \cdot 4}{1 \cdot 2} \right] \cdot 4$ (p —первая буква слова proportio). Далее, Орем словесно формулирует многочисленные правила операций с дробными отношениями вроде

$$a^{n/m} = (a^n)^{1/m}, \quad a^{1/n} b^{1/n} = (ab)^{1/n}, \quad \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a}{b} \right)^{1/n},$$

$$a^{1/m} b^{1/n} = (a^n b^m)^{1/mn}, \quad \frac{a^{1/m}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a^n}{b^m} \right)^{1/mn},$$

$$(a^m)^{p/q} = (a^{mp})^{1/q} = a^{(mp/n) \left(\frac{1}{q/n} \right)}$$

и т. д. Во втором и третьем отделах «Алгоризма отношений» даны примеры его использования в задачах арифметики, теории музыки, геометрии. Орем подошел и к понятию иррационального показателя как отношения, «знаменование» которого «невыразимо» или «непознаваемо». Такие отно-

Николь Орем с армиллярной сферой.
Миниатюра из рукописи XIV в. французского перевода Орема
книги Аристотеля «О небе» (Париж, Национальная библиотека)



шения, писал Орем, можно заключать между «достаточно близкими» целыми или дробными. Вопрос об арифметическом измерении любых «отношений» был практически решен 250 лет спустя в учении о логарифмах.

Создание формального алгоритма дробных отношений, т. е. по существу, обобщение действия возведения в степень на положительные дробные показатели, явилось важным достижением средневековой алгебры. Хотя это сочинение Орема было напечатано только в XIX в., оно получило распространение и в Средние века.

Орем существенно развил и учение Суайнхсхеда об интенсивности форм. Обширный труд Орема по этому предмету, написанный до 1374, г., сохранился в многочисленных списках под различными заголовками: «О конфигурации качеств» (*De configuratione quantitatum*), «О равномерности и неравномерности интенсивностей» (*De uniformitate et difformitate intensi-onum*), «Трактат о строении сил и мере неравномерностей» (*Tractatus de figuracione potentiarum et mensura difformitatum*) и др.

Орем придал этому учению большую простоту и наглядность, чем Суайнхсхед, благодаря систематическому употреблению геометрических образов величин и их взаимозависимостей. Значение геометрических изображений Орем подчеркивает сразу в первой главе части I трактата. Всякая поддающаяся измерению вещь, говорит он, кроме чисел, изображается в виде непрерывной величины, и для измерения поэтому нужны точки, линии, поверхности, в которых, согласно Аристотелю, первично обнаруживается мера и отношение; в прочих вещах мера или отношение познаются посредством умственного соотношения этих вещей с точками, линиями, поверхностями. Интенсивности качества непрерывных измеримых величин находятся в зависимости от их экстенсивностей, своего рода их протяженностей (от *extensio* — протяжение), как, например, скорость движения тела от пройденного пути или времени движения (ч. III, гл. IV). И поскольку среди различных видов континуума мы легче и проще всего постигаем величины и отношения линий (прямых отрезков), то интенсивности следует изображать линиями, приложенными в точках прямой, характеризующих экстенсивности. Первые отрезки Орем называет широтами (*latitudo*) качеств или форм, а отрезки, в концах которых прилагаются широты, — долготами (*longitudo*). Мера качества иногда называется также градусом (*gradus* — ступень, степень); «неградус» соответствует нулю. Длины широт пропорциональны интенсивностям; проводить их можно в любом направлении, но предпочтительно — перпендикулярно к линии долгот. Таким образом, зависимость между интенсивностью и экстенсивностью изображается некоторой плоской фигурой, ограниченной сверху кривой, которую Орем именует «линией верхнего края» или «линией интенсивности». Такое рассмотрение, естественно, помогает измерению и его пониманию. Орем особо подчеркивает пользу геометрического представления: некоторым людям трудно, например, понять, что такое равномерно-неравномерное качество, но нет ничего проще того наглядного факта, что высоты прямоугольного треугольника равномерно-неравномерны (ч. I, гл. IV).

Вначале Орем говорит о качествах, интенсивности которых распределены по точкам линии — одномерного континуума, это так называемые линейные качества. Но существуют еще «плоскостные» и «телесные» качества, распределяемые по точкам двумерных или трехмерных континуумов. Плоскостные качества изображаются телами с плоскими основаниями. Вопрос об изображении телесных качеств, естественно, представляет для Орема чрезвычайную трудность, и здесь текст его, в котором можно усмотреть

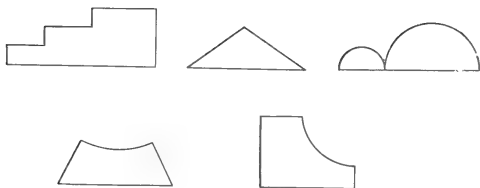


Рис. 74

некий подход к мысли о воображаемом пространстве четырех измерений, недостаточно ясен.

Мы рассмотрим только учение о линейных качествах, прежде всего их классификацию. Орем выделяет три основных типа качеств.

1. Равномерные, с постоянной интенсивностью или широтой; зависимость между интенсивностью и экстенсивностью изображается прямоугольником, т. е. линия интенсивности — отрезок прямой, параллельной линии долгот.

2. Равномерно-неравномерные, у которых разности широт любых пар точек пропорциональны соответственным разностям долгот; зависимость между интенсивностью и экстенсивностью изображается прямоугольным треугольником или четырехугольником с наклонной верхней стороной в зависимости от того, пересекает линия интенсивности прямую долгот или нет, т. е., как говорит Орем, кончается ли качество на «неградусе» или на градусе (ч. I, гл. XI).

3. Неравномерно-неравномерные — все остальные. Их Орем характеризует общим образом чисто отрицательно, как качества, у которых отношения разностей широт пар точек не равны отношениям разностей соответствующих долгот. Неравномерно-неравномерные качества разбиваются на две группы.

а) Простые неравномерно-неравномерные, когда линия интенсивности единая и не составлена из нескольких частей. Линия интенсивности может быть «рациональной» — дугой круга или эллипса или «иррациональной» — какой-либо другой кривой, помимо того, она может быть вогнутой или выпуклой. Всего Орем различает четыре рода простой неравномерной неравномерности (ч. I, гл. XIV—XV). Само слово «эллипс» не употребляется, говорится о кривой, у которой высоты пропорциональны высотам дуги круга.

б) Сложные неравномерно-неравномерные, получающиеся комбинацией шести предыдущих по два, три, четыре, пяти и шести; таких сочетаний будет $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$ и всего 63 (ч. I, гл. XVI). Здесь у Орема появляются и разрывные зависимости в форме ступенчатых ломаных, которые он называет ступенчатыми неравномерностями (*difformites gradualis*), и линии интенсивности, составленные из двух отрезков, дуг окружностей или эллипсов (рис. 74).

Понятие функции, как видно, было рассмотрено Оремом подробнее, чем оксфордскими «калькуляторами». Специального термина Орем еще не имел

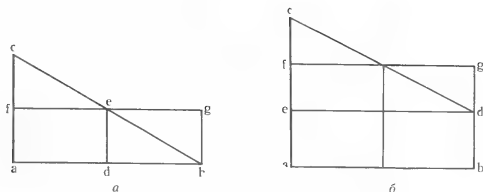


Рис. 75

и для наименования соответствия между величинами пользовался старым словом «отношение». Самые функции задавались с помощью словесных описаний и выражающих их фигур; об этих способах представления функций Орем писал: «Какое бы отношение (*proportio*) ни оказывалось между одной интенсивностью и другой..., такое же отношение обнаруживается между одной линией и другой, и наоборот»¹. Аналитическое задание функции при помощи формул появилось только в XVII в. у Декарта и Ферма.

Графические изображения качеств служат не только для наглядного изображения зависимостей, но и для исследования их свойств. В части II трактата Орем особо рассматривает возможные случаи движения или течения, именуемого упоминавшимся *fluxus*. Здесь же введено понятие об ускорении (*velocitatio*) как интенсивности скорости, причем само ускорение может быть как равномерным, т. е. постоянным, так и неравномерным различных видов (ч. II, гл. V).

В VII главе III части Орем геометрически исследует движение в случае равномерно-неравномерной скорости, т. е. равномерного ускорения, и доказывает равносильность такого движения равномерному движению со средней скоростью, т. е. теорему о том, что средняя скорость равномерно ускоренного движения равна средней арифметической начальной и конечной скоростей. Для этого он доказывает равенство площадей прямоугольного треугольника *abc* или трапеции *abdc* и прямоугольника *abgf* (рис. 75), высота которого равна половине высоты треугольника или полусумме оснований трапеции. Треугольник и трапеция служат изображениями равномерно-ускоренного движения, скорость которого в конечной точке соответственно равна нулю или отлична от нуля, а прямоугольник — изображением равномерного движения со скоростью, равной скорости предыдущего движения в среднее мгновение. Орем не дает определения средней, или, по его выражению, суммарной, скорости (*velocitas totalis*) и не говорит прямо, что площади рассматриваемых фигур выражают пройденный путь, но такое понимание естественно следует из его рассуждений и даже лежит в их основе. Для более отчетливого выражения пропорциональности пути и площади фигуры, ординаты которых выражают мгновенные скорости, необходимо было развитое учение о бесконечно малых. Нельзя не отметить вместе с тем разительное сходство вывода Орема и более подробного доказательства той же теоремы, данного 250 лет спустя (в 1638 г.) Галилеем.

¹ Н. Орем. Трактат о конфигурации качеств. Перевод В. П. Зубова. «Историко-математические исследования», вып. II. М., 1958, стр. 637.

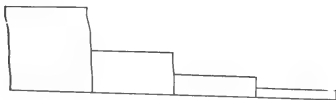


Рис. 76

Из другого сочинения Орема — «Вопросов по геометрии Евклида» (*Quaestiones super geometriam Euclidis*) — видно, что в изучении равномерно ускоренного движения он продвинулся еще далее. Именно он установил, что при начальной скорости, равной нулю, проходимые при этом пути возрастают пропорционально квадрату времени и что расстояния, пройденные за одинаковые промежутки времени, возрастают пропорционально последовательным нечетным числам, считая от единицы (Суайнсхед и Хейтесбери не пошли дальше нечетных чисел 1, 3 для случая деления времени движения пополам). Первое свойство является следствием 19 предложения VI книги «Начал» Евклида (площади подобных треугольников относятся, как квадраты соответственных сторон), а второе вытекает из первого. Мы обычно связываем оба с именем Галилея, благодаря которому они прочно вошли в механику.

В III части трактата разбираются примеры движения, в которых скорость меняется от промежутка к промежутку скачками. Кроме ряда, который мы видели у Суайнсхеда, в VIII главе III части имеются другие, например ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \dots = \frac{7}{4}.$$

Сам Орем говорит, что движение на первом участке ($1/2$) происходит равномерно (с постоянной скоростью) в каком-нибудь градусе; на втором ($1/4$), начиная с этого градуса, равномерно-неравномерно (равномерно ускоренно) достигает вдвое большего градуса; на следующем участке ($1/8$) — опять равномерно; на четвертом участке ($1/16$) равномерно-неравномерно достигает вдвое большего градуса, чем в начале этого отрезка, и т. д. (ч. III, гл. IX). Суммирование основывается на том, что каждый нечетный член ряда находится к последующему члену в отношении 4 : 3, откуда следует, что в том же отношении находится сумма нечетных членов, равная 1, к сумме четных членов, поэтому сумма четных членов равна $3/4$.

Вместе с тем Орем пользуется геометрической интерпретацией рядов такого типа в виде простирающейся в бесконечность фигуры конечной площади. В случае ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ он рассматривает два единичных квадрата, один из которых подразделен параллелями к одной из его сторон на прямоугольники, высоты которых равны $1/2, 1/4, 1/8$. Тогда из второго квадрата и указанных прямоугольников Орем строит ступенчатую фигуру, которая простирается в бесконечность и имеет площадь, равную 2 (рис. 76). Располагая квадрат и прямоугольники по горизонтали, Орем истолковывает их как изображение движения, скорость которого в течение каждого дня постоянна, но каждый день в два раза меньше скорости предыдущего дня (ч. III, гл. IX). При этом, пишет Орем, тело «только за всю вечность (*nunquam nisi in eternum*) пройдет путь, вдвое больший того, который был

пройден за 1-ю часть времени. Но какой бы отрезок пройденного пути ни брать, он всегда будет меньше, чем удвоенный отрезок пути, пройденного в 1-й день¹. В заключение Орем кратко поясняет, как распространить эти идеи на простирающиеся в бесконечность тела конечного объема.

Трактат Орема не был напечатан, но в рукописях получили большое распространение. В некоторых университетах уже в конце XIV в. было введено преподавание учения о широтах форм. В Италии это учение пропагандировал и комментировал Биаджо Пелакани (ум. 1461) из Пармы; здесь же было трижды напечатано изложение теории по Орему под названием «Трактат о широтах форм» (Tractatus de latitudinibus formarum, Padua, 1482 и 1486; Venetia, 1505); в 1515 г. появилось еще одно издание в Вене. В этом трактате мы находим интересное замечание о поведении величины в соседстве с ее наибольшим значением. Автор, вероятно один из учеников или ближайших последователей Орема, утверждает, что в любой фигуре вроде полукруга интенсивность заканчивается на «высшем градусе медленности» (tarditas), а ремиссия начинается с высшего градуса медленности в средней точке, где заканчивается интенсивность. Что этот «высший градус медленности» есть, по терминологии Орема, «неградус», т. е. нуль, все же не указано. Аналогичное замечание вновь сделал в 1615 г. И. Кеплер (величина по обе стороны от максимума вначале обладает нечувствительным убыванием), а вскоре затем П. Ферма сформулировал необходимое условие экстремума гладкой кривой. В данной связи стоит упомянуть, что Орем в своем сочинении (ч. I, гл. XX—XXI) подходил к вопросу о количественной оценке кривизны (curvitas) линий и, в частности, заметил, что интенсивность кривизны окружности обратно пропорциональна радиусу.

В теории рядов к Орему восходит еще одно замечательное открытие, а именно доказательство расходимости так называемого гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Это доказательство содержится во втором из «Вопросов по геометрии Евклида». Орем рассматривает гармонический ряд в связи с проблемой делимости континуума и суммирования бесконечного множества частей непрерывной величины. Он отмечает, что если части некоторой величины a , на пример некоторого отрезка, равные $\frac{a}{n}$, $\frac{a}{n^2}$, $\frac{a}{n^3}$, ... при $n > 1$, последовательно прибавляются друг к другу, то их сумма (totum) никогда не является бесконечной, и формулирует правило суммирования бесконечной убывающей геометрической прогрессии. В то же время Орему известно, что прибавление бесконечно многих частей величины к ней, даже в случае, когда эти части неограниченно убывают, может дать бесконечно большую сумму, что иллюстрируется примером: час подразделяется на бесконечно много частей, образующих геометрическую прогрессию, и в каждую из этих частей часа проходит соответственно фут, $\frac{1}{2}$ фута, $\frac{1}{3}$ фута, $\frac{1}{4}$ фута и т. д. Тогда сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ бесконечна, так как $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ больше $\frac{1}{2}$, сумма от $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{8}$ также больше $\frac{1}{2}$, так же как сумма от $\frac{1}{9}$ до $\frac{1}{16}$ и т. д. Расходимость гармонического ряда (этот термин появился в XVII в.) была доказана снова независимо от Орема и другим способом П. Менголи в 1650 г., дальнейшие доказательства были даны Иоганном и Якобом Бернулли в 1689 г.

¹ Н. Орем. Трактат о конфигурации качеств, стр. 715.

(см. ч. II, гл. 7). Доказательство Орема была намного проще доказательств математиков XVII в. Другие «вопросы» Орема относились к несоизмеримости стороны и диагонали квадрата, к учению о широтах форм к углам касания и т. д.

Учение о широте форм содержало ряд моментов, получивших развитие в математике переменных величин в XVII и последующих веках. В центре учения Орема лежало представление о переменной широте формы и ее графическом представлении. К этому представлению наиболее выдающиеся умы схоластической науки пришли в результате попыток осмыслить с новых позиций проблемы древней и современной им натурфилософии. Если передавать взгляды Орема на современном языке, то его трактовке зависимости между широтами и долготами ближе всего, пожалуй, соответствует наше представление о функции точки континуума одного, двух или трех измерений. Способ задания зависимости Орема только словесный и графический, недостаточное развитие алгебры не позволяло пользоваться при этом формулами, ставшими основным способом задания функций в XVII—XVIII вв. Таким образом, хотя графическое задание функций имеет для Орема решающее значение, об уравнении линии интенсивности у него нет и речи, более того, нет речи и о координатах точек. Орем дал и своеобразную классификацию функций.

После Орема учение о широте форм не было обогащено новыми идеями и застыло в том виде, какой получило в середине XIV в. Попытки его основателей связать математику с естествознанием не вышли за границы общих абстрактных умозрений, и, скажем, установив равносильность равномерно ускоренного движения и равномерного движения со средней скоростью, они не использовали этот результат в коренной проблеме движения брошенного тела. В учении Орема было несколько глубоких идей, но собственно математический аппарат для решения конкретных проблем был небогатым. Более того, этот аппарат работал вхолостую для разбора отдельных остроумных, но искусственных примеров. Из «форм» рассмотрены были только ограниченные отрезками прямых и упоминались как возможные дуги окружности и эллипса; об алгебраическом исследовании кривых, составляющем суть аналитической геометрии, Орем и не помышлял.

Интересные результаты в суммировании рядов получил последователь Орема португалец Альвар Томас, преподававший в первой четверти XVI в. в Сорбонне, где он получил степени магистра, а затем доктора медицины. Результаты Томаса содержатся в его «Книге о трояком движении и отпущениях» (*Liber de triplici motu proportionibus annexis, Parisii, 1509*). Под «трояким движением» здесь имеются в виду три вида движения по классификации Аристотеля — перемещение в пространстве (то, что мы называем механическим движением), движение по количеству (рост и убыль) и движение по качеству (качественное изменение). Томас формулирует общее правило суммирования ряда

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

где $|x| < 1$. Доказательство его (чисто словесное) основано на знании суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии: данный ряд

раскладывается в сумму рядов $\sum_{n=k}^{\infty} x^n$, где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, суммы которых

соответственно равны

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{x}{1-x}, \quad \frac{x^2}{1-x}, \dots$$

Томас суммирует также ряды вида

$$1 + x + \lambda x^2 + \mu x^3 + \lambda^2 x^4 + \mu^2 x^5 + \dots$$

и

$$1 + \left(c + \frac{a}{b}\right)x + \left(c + \frac{a}{b\lambda}\right)x^2 + \left(c + \frac{a}{b\lambda^2}\right)x^3 + \dots,$$

примерами которых являются соответственно ряды

$$1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{19}{16} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{5}{2}$$

и

$$1 + 3 \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + 3 \frac{1}{10} \cdot \frac{3^2}{5^2} + 3 \frac{1}{20} \cdot \frac{3^3}{5^3} + \dots$$

Более сложные ряды, представляющие трансцендентные функции, ему, естественно, не удастся просуммировать, но все же, основываясь на сравнении с геометрической прогрессией, он указывает некоторые границы, между которыми лежит сумма ряда. Например, Томас заключает сумму ряда

$$1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \dots, \quad 1 < \lambda_k < k + 1,$$

между суммами

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

и получает оценки

$$2 < 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots < 4$$

и

$$3 < 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3}{3^3} + \dots < 9.$$

Точное значение суммы первого из этих рядов равно $2 + \ln 2$, а второго $3 + \ln 3$. Томас знать этого не мог, но он правильно отметил, что проходимые в данном случае пути иррациональны.

Труд Томаса — лучшее достижение в этой области после Орема. Подлинное развитие учения о широтах форм получило только в XVII в. в аналитической геометрии Декарта и Ферма, в динамике Галилея и в геометрии неделимых Кавальери. Хотя математики XVII в. прямо не ссылаются на Орема, несомненно, что его учение сыграло существенную роль в подготовке их открытий. Эти открытия смогли быть сделаны только тогда, когда идея переменной величины оказалась в живом контакте с естествознанием и для решения возникающих здесь задач был создан соответствующий алгебраический аппарат.

ПЯТАЯ ГЛАВА

ЭПОХА ВОЗРОЖДЕНИЯ

XV и XVI века вошли в историю Европы под названием «эпохи Возрождения», при этом имеется в виду возрождение того высокого уровня культуры, который был достигнут в античном мире. На самом же деле эта эпоха характеризуется гораздо более глубокими преобразованиями в жизни всего общества: именно в это время еще в недрах феодального строя возникает новый общественный строй — буржуазное общество.

В промышленности появляются мануфактуры, требующие технических усовершенствований и изобретений. Тогда же появляются в Европе компас, часы и порох, дешевая бумага и книгопечатание. Гигантски возрастает торговля, приводящая к исключительному росту мореплавания и к великим географическим открытиям. Бумага и книгопечатание делают научные знания необходимым элементом общественной жизни. Совершается подлинная культурная революция.

«Это был величайший прогрессивный переворот из всех пережитых до того времени человечеством,— писал о XV—XVI вв. Ф. Энгельс,— эпоха, которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учености. Люди, основавшие современное господство буржуазии, были всем чем угодно, но только не людьми буржуазно-ограниченными. Наоборот, они были более или менее овеяны характерным для того времени духом смелых искателей приключений. Тогда не было почти ни одного крупного человека, который не совершил бы далеких путешествий, не говорил бы на четырех или пяти языках, не блистал бы в нескольких областях творчества. Леонардо да Винчи был не только великим живописцем, но и великим математиком, механиком и инженером, которому обязаны важными открытиями самые разнообразные отрасли физики. Альбрехт Дюрер был живописцем, гравером, скульптором, архитектором и, кроме того, изобрел систему фортификации, содержащую в себе некоторые идеи, которые много позднее были вновь подхвачены Монталамбером и новейшим немецким учением о фортификации. Макиавелли был государственным деятелем, историком, поэтом и, кроме того, первым достойным упоминания военным писателем нового времени. Лютер вычистил авгиевы конюшни не только церкви, но и немецкого языка, создал современную немецкую прозу и сочинил текст и мелодию того проникнутого уверенностью в победе хора, который стал «Марсельезой» XVI века. Герои того времени не стали еще рабами разделения труда, ограничивающее, создающее однобокость влияние которого мы так часто наблюдаем у их преемников. Но что особенно характерно для них, так это то, что они почти все живут в самой гуще интересов своего времени, принимают живое участие в практической борьбе, становятся на сторону той или иной партии и борются кто словом и пером, кто мечом,

а кто и тем и другим вместе. Отсюда та полнота и сила характера, которые делают их цельными людьми»¹.

Энгельс называет «революционным актом, которым исследование природы заявило о своей независимости и как бы повторило лютеровское сожжение папской буллы», издание бессмертного творения Коперника, бросившего «вызов церковному авторитету в вопросах природы. Отсюда, — продолжает Энгельс, — начинается свое летосчисление освобождение естествознания от теологии»².

Исторически сложилось так, что именно в математике начинают искать последний критерий истины. С одной стороны, чисто практическое преимущество, которое получал купец над конкурентами даже при небольшом улучшении способов вычисления своих координат на море, а с другой стороны, религиозные традиции, утверждавшие, что Вселенная построена Богом по математическому плану, ставили математику в центр внимания. И если в начале Средних веков «математиками» называли людей, занимавшихся астрологией, и подвергали их преследованию как колдунов и чернокнижников, то Леонардо да Винчи пишет, что «тот, кто порочит высшую достоверность математики, тот питается сундучком»³. И хотя по мере роста действительного могущества математики такие напыщенные декларации сменяются более трезвым пониманием ее возможностей, математика уже в то время становится и остается основным инструментом европейской культуры.

В XV—XVI вв. математика развивается главным образом в Италии, Франции и Германии, к которым в конце XVI в. присоединяется Голландия, переживавшая в это время первую в Европе буржуазную революцию.

На Руси математика начинает развиваться только в XVI в., когда после освобождения Руси от татарского ига устанавливаются новые связи между нею и Западной Европой. В это время на Руси появляются рукописные переводы и компиляции из сочинений европейцев и европейских переводов ученых Востока; в этих рукописях создается русская математическая терминология. Особенно следует отметить арифметические рукописи с традиционным названием. «Книга рекома по-гречески арифметика, а по-немецки — алгоризма, а по-русски цифирная счетная мудрость» (в настоящее время сохранились рукописи этого типа, переписанные в XVII в.). До настоящего времени дошла единственная математическая рукопись XVI в. — «статья» из «Книги сошному письму», посвященная вычислению налога с земли, взимаемому в зависимости от количества и качества земельной площади в условных единицах — «сохах». Здесь же впервые описываются русские счеты, первоначально приспособленные для расчетов «сошного письма». В XVI—XVII вв. появляются первые русские рукописные книги по математике, вытесненные в начале XVIII в. книгой Л. Ф. Магницкого «Арифметика, сиречь наука числительная», напечатанной в Москве в 1703 г.

¹ Ф. Энгельс. Диалектика природы. М., 1969, стр. 7—8.

² Там же, стр. 8.

³ *Leonardo da Vinci. Quaderni d'anatomia*. Ed. O. C. L. Vangensteen, A. Fonahn, H. Hopsstock. Christiania, v. 2, 1912, p. 20.

Наибольших успехов математики Европы XV—XVI вв. добились в области алгебры. Крупнейшим европейским алгебраистом XV в. был итальянец Лука Пачоли (ок. 1445 — ок. 1515), уроженец Борго Сан Сеполькро в центральной Италии, долгое время работавший домашним учителем в Венеции и Риме. Около 1475 г. он вступил во францисканский монашеский орден и с тех пор именовался братом Лукой из Борго Сан Сеполькро. Будучи ученым монахом-францисканцем, Лука Пачоли работал профессором математики в университетах и других учебных заведениях Рима, Неаполя, Милана, Флоренции, Болоньи и других городов. Еще в родном городе Пачоли испытал сильное влияние своего земляка Пьетро деи Франчески, нарисовавшего его известный портрет. В Милане Пачоли близко подружился с Леонардо да Винчи, по настоянию которого Пачоли написал книгу «О божественной пропорции» (*De divina proportione*, 1497, издано в Венеции в 1509 г.).

Основным трудом Пачоли была «Сумма [знаний] по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» (*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, 1487), изданная в Венеции в 1494 г.

В арифметической части «Суммы» излагались различные приемы арифметических действий, в том числе индийский прием умножения с помощью решетки (см. стр. 184), именуемый здесь *gelosia* по названию решетчатых оконных ставен. Сын своего времени, Пачоли дает мистическое объяснение того, что совершенные числа оканчиваются лишь на 6 и 8 тем, что добрые и совершенные люди соблюдают установленный порядок. По самым разнообразным поводам Пачоли цитирует Библию.

Алгебру Пачоли называет *regula della cosa* — «правилом вещи» и *arte maggiore* — «великим искусством». Он пользуется алгебраическими символами (алгебраическими буквами — *caratteri algebratici*), квадратный корень обозначает R (*radice* — корень) или R_2 , кубический корень R_3 или R_3 cuba, корень четвертой степени R_4 или R_4 . Свободный член в уравнениях Пачоли обозначает n^0 (*numero* — число), x — *cosa* (вещь), x^2 — *ce* (*censo* — квадрат, от латинского *census*, которым был переведен арабский термин «мал»), x^3 — *cu* (*cubo*), x^4 — *ce. ce.* (*censo de censo*), x^5 — p^0r^0 (*primo relato* — «первое relato»), x^6 — *ce. cu.* (*censo de cubo*), x^7 — 2^0r^0 (*secondo relato* — «второе relato»), x^8 — *ce. ce. ce.* (*censo de censo, de censo*), x^9 — *cu. cu.* (*cubo de cubo*), x^{10} — *ce. p^0r^0* (*censo de primo relato*), x^{11} — 3^0r^0 (*tersio relato* — «третье relato») и т. д.¹ Система названий степеней у Пачоли была мультипликативной ($x^6 = x^{2 \cdot 3}$, $x^8 = x^{2 \cdot 2 \cdot 2}$, $x^9 = x^{3 \cdot 3}$, ...). Названия простых степеней, которые нельзя выразить в виде произведений 2 и 3, у Пачоли состоят из номера простой степени и слова *relato*. Аналогичные названия мы встречали у византийца Михаила Пселла (XI в.), называвшего x^5 «первым невыразимым», а x^7 — «вторым невыразимым», что указывало на невыразимость чисел 5 и 7 в виде произведений 2 и 3. Возможно, что *relato* — искаженный перевод на латынь термина Пселла *ἄλογος*: переписчик мог, не появив греческого термина, прочесть его *ὁλογος* — «отношение» и перевести латинским словом *relatum*, соответствующим итальянскому *relato*. Этот принцип у

¹ См. *Luca Paccioli. Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita. Venezia, 1494, л. 97 об.*



Лука Пачоли с молодым герцогом Урбино.
Картина Якопо де Барбари (Неаполь, Национальный музей)

Пачоли выдержан не вполне последовательно: называя x^{13} , x^{17} , x^{19} и x^{23} соответственно четвертым, пятым, шестым, седьмым *relato*, он называет x^{25} не $p^0 r^0$ de $p^0 r^0$, а восьмым *relato* и x^{29} — девятым *relato*.

Второе неизвестное (наш y) Пачоли называл *quantita* (количество) и обозначал qr^0 , y^2 — *se. de qr^0* и т. д. Сложение обозначалось знаком $\tilde{p}$ (*plus* или *più* — «больше», откуда наше слово «плюс»), вычитание — знаком $\tilde{m}$ (*minus*, или *meno* — «меньше», откуда наш «минус»). Пачоли употребляет и выражения типа « $\tilde{m}^4$ меньше нуля» и формулирует правило знаков при умножении чисел, перед которыми стоят знаки $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$. На трактовку Пачоли отрицательных чисел, по-видимому, оказало влияние то, что он был изобретателем двойной бухгалтерии, в которой все денежные операции записываются в столбцах «кредита» (дохода) и «дебета» (долга); теория бухгалтерии изложена Пачоли в той же «Сумме». Задачи, решаемые в «Сумме», не выходят за пределы задач, решавшихся в «Книге абака» Леонардо Пизанского, за «Практической геометрией» которого следует и геометрическая часть «Суммы».

Книга «О божественной пропорции» названная так по «золотому сечению», была посвящена зодчеству (по Витрувию), пяти правильным многогранникам, равно как и многогранникам, получаемым из них путем «отсечения» и «насадки» (срезов вершин в виде правильных пирамид или построений их на гранях), а также пропорциям человеческого тела, выражаемым в целых числах, меньших 10. «Золотое сечение» и правильные многогранники излагались Пачоли по так называемой XIV книге

Summa de Arithmetica geo-

metria. Proportioni: et proportionalita:

Mouamente in uersa In Zofolano su la riuu del Denacense et
unico carpiouilla Laco: Ammirissimo Sito: de li antique z
evidenti ruine di la nobil cita Denaco uitta illustra-
to: Cum numero obita de Imparati epithaphij
di antique z perfette littere sculpati do-
tato: z cus knistini z mirabil co-
lone marmorei: Inumeri
fragmenti di alaba-
stro porphidi z serpentin. Cose certa
scitor mio uiletto oculata si
de miratu uigne so-
terra le ritra
nano.

Continentia de tutta lopera:

De numeri e misure in tutti modi
occurrenti.

Proportioni e pproportionalita a notitia
del 1: de Euclide: e de tutti li altri
sui libri.

Triani: ouero enidette numero. 13. per
le quantita continue pproportionali del
6: e 7: de Euclide extratte.

Tutte le parti de bagadismo: cioe requa-
re partire: multiplicare: sumare: e so-
trarre: con tutte sue paze in sani e rotti
e radici e progressioni.

De la regola mercanteca uitta del 3. e
sui fondamenti co casi esemplari p e m
8. 5. guadagni per dite: trasportatio-
ni: e inuestite.

Partir: multiplicar: sumar: e sottrar de
le pproportioni: e de tutte sorti radici.

De le tre regole del Catayn uitta poli-
tione: e sua origine.

Euclidotte general: ouer conclusioni ma-
tremo. 66. abottere ogni caso che per
regole ordinarie non si podesse.

Tutte sorte binomij e recisi: e altre linee
irrationali del decimo de Euclide.

Tutte regole de Algeba uitté de la cosa

e loz sabache e fondamenti.

Logognie in tutti modi: e loz partire.

Socide de bestiami: loz partire.

Filtri pfectioni: cottimici: diuelli: dogagioni:
e godimenti.

Baratti in tutti modi semplici: compo-
siti: col tempo.

Cambi real: scchi: fittitij: e uoluntati:
ouer comuni. (termini

affertiti semplici e a capo danno: e altri
uelli: saldi: conti: de tempo e denari: e de
reare a vn di piu partire.

Da: argenti: ellozo affinare: e curattare.

Molti casi e ragioni straordinarie: va-
rie e uierse a tutte occurrente: como
nella sequente tauola appare ordina-
tamente de tutte.

Ordine a saper tener ogni cotoze scriptu-
rez del quaderno in vinegia.

Zarifsa de tutte usanze e costumi mer-
cantekchi in tutto el mondo.

Pratica e theorica de geometria: e de li
cinqui corpi regulari: e altri dipendenti

de molte altre cole de grandissimi piace-
rize frutto: conuino dissalamente per
la sequente tauola appare.

«Начал» Евклида (на самом деле Гипсикла). Изображение многогранников на 59 таблицах сделал для своего друга Леонардо да Винчи, для которого Пачоли, в свою очередь, подсчитал количество металла, необходимого для статуи всадника.

Никола Шюке

Во Франции оригинальный вклад в алгебру был сделан бакалавром медицины Никола Шюке (ум. ок. 1500), уроженцем Парижа, работавшим в Лионе, крупном торговом центре, где имелаась большая итальянская колония. Последнее обстоятельство не осталось без влияния на законченный в 1484 г. рукописный труд Шюке «Наука о числах в трех частях» (*Le triparty en la science des nombres*). Это сочинение, написанное по-французски, содержит правила вычислений с рациональными числами, затем с иррациональными корнями и, наконец, учение об уравнениях. В нем по аналогии с итальянским термином *millione* (буквально «большая тысяча»), применявшимся, по-видимому, впервые известным путешественником Марко Поло (1254—1323) для описания богатств стран Востока, вводятся дальнейшие термины «биллион», «триллион» и т. д. до «вониллиона».

Заслуживает упоминания сопоставление Шюке арифметической и геометрической прогрессий

$$1, 2, 3, \dots, n$$

и

$$a, a^2, a^3, \dots, a^n$$

Написав их друг под другом, он отмечает, что произведение двух членов нижней прогрессии соответствует сумме стоящих над ними членов верхней. Здесь налицо предвосхищение свойств будущих логарифмов. Так же как и Пачоли, Шюке приводит правила действий с отрицательными числами и пользуется для сложения и вычитания знаками $\bar{p}$ и $\bar{m}$. Знак $\bar{m}$ служит и для обозначения отрицательных чисел, которые Шюке называет *ung moins*, т. е. «мнее». Отрицательные числа применяются уже в первой части книги, при решении задач на тройное правило и правила ложных положений. Еще более важные приложения они нашли, как мы скоро увидим, в алгебре.

В качестве своего собственного оригинального открытия Шюке приводит «правило средних чисел». Утверждая (без доказательства), что $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ лежит между $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$, он применяет эту среднюю при решении задач методом двойного ложного положения, получая, например, для уравнения $x^2 + x = 39$ $\frac{13}{81}$ при $x_1 = \frac{5}{1}$, $x_2 = \frac{6}{1}$ (причем $x_1 < x < x_2$), $x_3 = \frac{11}{2}$, $x_4 = \frac{17}{3}$, $x_5 = \frac{23}{4}$, $x_6 = \frac{29}{5}$ и, наконец, $x_7 = \frac{52}{9}$, оказывающиеся точным значением. Выгода этой средней состоит в том, что знаменатель возрастает медленно, однако вычисление в целом, понятно, довольно кропотливо. Обозначая корни соответственно R^2 , R^3 и т. д., Шюке делает замечание, что «ради сохранения порядка» можно было бы считать само данное число корнем первой степени из этого же числа, обозначив его R^1 .

Вместо скобок он применяет подчеркивание, записывая, например, наше $\sqrt{14 + \sqrt{180}}$ как $\underline{R} \cdot 14 \cdot \underline{p} R \cdot 180$.

Вместо прежнего названия неизвестной «вещь» Шюке вводит термин *premier*, т. е. «первое», или же еще, трактуя неизвестную геометрически, *nombre linear* — «линейное число». Так же вводятся вторые, третьи, четвертые числа, соответствующие степеням неизвестной. Для обозначения степеней неизвестной сверху справа от коэффициента пишется маленький показатель степени. Нашим $12x$, $12x^2$, $12x^3$ у Шюке соответствуют 12^1 , 12^2 , 12^3 . В соответствии с этим свободный член уравнения, например 12, он записывает как 12^0 , говоря, что такие числа «имеют имя нуль». Таким же образом он пишет, что 8^3 , умноженное на 7^1 , дает 56^2 вместо нашего $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$, смело вводя не только нулевой, но и отрицательный показатели. Возможно, что Шюке находился под влиянием работы Орема, хотя и не использовал его дробных показателей. Столь широкое применение символики, несмотря на отсутствие знаков умножения, деления и равенства, а также самой неизвестной, сближает алгебраические записи преобразования Шюке с нашими современными.

Коссисты

«Алгебраические буквы», которыми Пачоли обозначал неизвестную и ее степени и которыми с незначительными видоизменениями пользовались итальянские алгебраисты XVI в., были важным шагом на пути создания алгебраической символики. Следующий шаг был сделан немецкими алгебраистами XVI в., известными под названием «коссистов». Это название объясняется тем, что они именовали алгебру *Coss* — от итальянского слова *cosa* — вещь, обозначавшую неизвестную у итальянских алгебраистов.

Название «*Regel Algrebre oder Cosse*» для алгебраических правил мы встречаем в арифметике Яна (Иоганна) Видмана (1460 — первая половина XVI в.), уроженца чешского города Хеба, преподававшего в Лейпцигском университете. Видман был первым, кто начал в университете чтение лекций по алгебре. Учебник Видмана «Быстрый и красивый счет для всего кушечества» (*Behende und hubsche Rechenung auf allen Kauffmannschaft*) был напечатан в Лейпциге в 1489 г. и вскоре был еще несколько раз издан в различных немецких городах; эта книга знаменита тем, что здесь впервые появились знаки $+$ и $-$, заменившие знаки $\bar{p}$ и $\bar{m}$ итальянцев. Знак $+$, по-видимому, произошел от знака $\&$, применяемого до настоящего времени в названиях торговых и промышленных компаний и, в свою очередь, происходящего от латинского союза *et* — «и». Наиболее знаменитыми коссистами были Адам Ризе (1489—1559), известный также под именем *Gigas* (латинский перевод слова *Riese* — великан, гигант), уроженец Франкони, написавший учебник «*Coss*» в 1524 г., и Кристоф Рудольф (1500 — середина XVI в.) из Яура (Явора) в Силезии, выпустивший в 1525 г. в Страсбурге учебник под традиционным названием «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых *Косс*» (*Behend und hubsch Rechnung durch die Kunstreichen Regeln Algrebre, so gemeinlich die Coss genannt werden*).

Книга Ризе является сокращением сочинения, автор которого именуется *Initius Algebras*, что можно перевести «основоположник алгебры», но

здесь Algebras — собственное имя, а сама алгебра именуется Gebra und Almuchabola, что представляет собой искажение арабского названия «ал-джабр ва-л-мукабала». В предисловии к рукописи говорится, что ее оригинал был написан по-арабски, переведен с арабского на греческий «Архимедом», с греческого на латынь «Апулеем» (переводчики эпохи Возрождения охотно называли себя именами классиков), а с латинского на немецкий — магистром Андреасом Александром. Указывается и итальянское название этой книги «De la cosa» («О вещи»). По-видимому, в основе текста этой рукописи лежала одна из арабских алгебр, которая попала в Германию через византийцев.

В первых коссистских алгебрах применялся аддитивный принцип обозначения степеней: например, в хранящейся в Дрездене рукописи С.80 (ок. 1480), которой пользовался Ян Видман, степени обозначались с помощью сокращенных обозначений: $\mathcal{V}$ — готическое r — res — вещь, т. е. x , $\mathcal{Z}$ — готическое z — Zensus — квадрат, т. е. x^2 , $\mathcal{C}$ — готическое c — cubus — куб, т. е. x^3 , — следующим образом: $x^4 = 33$, $x^5 = \mathcal{V} 33$, $x^6 = 333$, $x^7 = \mathcal{C} 33$, $x^8 = 3333$, $x^9 = \mathcal{V} 3333$, $x^{10} = 33333$. Но уже в хранящейся в Вене рукописи 5277 (ок. 1500), которой пользовался Кристофор Рудольф, применяется мультипликативный принцип: $x^4 = 33$, $x^5 = alt$, $x^6 = 3 + c$.

В рукописях Initius Algebras и Ризе x называется Radix (корень) или Coß (вещь) и сокращенно обозначается $\mathcal{V}$ (т. е. r), x^2 — Zensus или Quadrat ($\mathcal{Z}$, т. е. z), x^3 — cubus ($\mathcal{C}$, т. е. c), x^4 — Zensus de Zensu (33), x^5 — Sursolidum (β , т. е. ss), x^6 — Zensicubus ($3\mathcal{C}$), x^7 — Bissursolidum ($bi\beta$), x^8 — Zensus Zensui de Zensu (333), x^9 — Cubus de Cubo ($\mathcal{C}$). Дальнейшие степени в рукописи Initius Algebras обозначаются: $x^{10} = 3\beta$, $x^{11} = ter \beta$, $x^{12} = 33 \mathcal{C} x^{13} = quadr\beta$, $x^{14} = 3bi\beta$, $x^{15} = \beta$, $x^{16} = 3333$, $x^{17} = quint\beta$, $x^{18} = 3\mathcal{C}$.

Автор рукописи Initius Algebras объясняет названия x^5 и x^7 как сокращение слов surdum solidum (буквально — «глухое тело»); Ризе говорит: «Sursolidum — глухое число» (ist eine taube zal). Слова surdum и taube — латинский и немецкий эквиваленты арабского слова «асамм» — «немой, глухой», которым арабы переводили греческое $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ — «невыразимый», «немой» (слово «асамм», как $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$, применялось также для обозначения иррациональных корней), т. е. здесь, так же как у Пселла, имеется в виду невыразимость степеней x^5 и x^7 через вторую и третью степени. Слово solidum — «тело» указывает на то, что коссисты рассматривали эти степени как обобщения кубов.

Свободный член коссисты обозначали знаком $\emptyset$, произошедшим от буквы δ — первой буквы слова Dragma — искажения арабского слова «дирхам», которым обозначал свободный член ал-Хорезми. Знаки ϕ , $\mathcal{V}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{C} 33$, β , $3\mathcal{C}$, $bi\beta$ и т. д., которыми коссисты обозначали свободный член и степени неизвестной, получили название «коссических знаков».

Терминология коссистов получила широкое распространение не только в Германии, но и в других странах Европы. В частности, автор первой печатной «Арифметики» (1703) на русском языке Л. Ф. Магницкий (1669—1739) называет x^2 — «зензус», x^3 — «кубус», x^4 — «зензизенз», x^5 — «сурдесолидус», x^6 — «вензикубус», x^7 — «бисурдесолидус», x^8 — «зензизенз-зензус» и т. д. Здесь же Магницкий приводит и «коссические знаки».

Решение уравнений третьей и четвертой степеней

Пачоли закончил раздел «Суммы» об алгебраических уравнениях замечанием о том, что для решения кубических уравнений $x^3 + ax = b$ и $x^3 + b = ax$ (коэффициенты a и b предполагаются положительными) искусство алгебры еще не дало способа, как не дал еще способ квадратуры круга¹. Эти слова Пачоли послужили отправным пунктом для работ итальянских алгебраистов по решению кубических уравнений в радикалах, открытие которого было первым крупным математическим достижением европейских ученых, существенно превзошедшим открытия математиков Востока.

Первым удалось решить в радикалах один из видов кубического уравнения $x^3 + ax = b$ ($a, b > 0$) профессору Болонского университета Шипионе (Сципиону) дель Ферро (1456—1526). По обычаю того времени дель Ферро не опубликовал решения, а сообщил его своему ученику Фиор, который пользовался правилом решения, найденным дель Ферро, на математических турнирах.

На одном из таких турниров Фиор встретился с уроженцем Брешии Николо Тартальей (1500—1557), настоящая фамилия которого, по-видимому, была Фонтана. Он был прозван Тартальей потому, что во время взятия Брешии французами был тяжело ранен в горлань, в результате чего всю жизнь не смог свободно говорить (*tartaglia* — заика). Тарталья рос в бедности и учился без помощи учителя; позже сам преподавал математику в Вероне, Пьяченце, Венеции и Брешии.

Тарталья перед турниром, состоявшимся 12 февраля 1535 г., самостоятельно нашел правило дель Ферро и решил все задачи, предложенные Фиоре, который был настолько обескуражен, что не решил ни одной задачи, предложенной Тартальей. Через день после турнира Тарталья нашел и решение уравнения $x^3 = ax + b$. Эти открытия Тартальи были опубликованы в алгебраическом трактате Джироламо (Иеропима) Кардано (1501—1556) «Великое искусство, или об алгебраических правилах» (*Arts magna sive de regulis algebraicis, Norimbergae, 1545*).

В 1539 г. Кардано, узнав об открытии Тартальи, выпросил у него формулировку решения, поклявшись его не публиковать. Тарталья сообщил свое правило в стихотворении из 25 строк, составленном им для лучшего запоминания. Восстановив по не вполне ясным формулировкам правило и доказав его, Кардано счел себя вправе поместить решение в своей книге, упомянув об авторстве Тартальи. Несмотря на это, за правилом закрепилось название «формула Кардано».

Кардано работал профессором в Милане, это был выдающийся ученый во многих областях науки. В своих философских трактатах он выступал за знания, основанные на опыте, а не на авторитете Аристотеля. Он был известен также как врач. Естественнонаучные работы Кардано сочетались с верой в пифагорейскую мистику чисел и другими суевериями; одно время он был придворным астрологом римского папы. Кардано был автором многих математических работ, крупнейшей из которых было «Великое искусство» — название алгебры, которое уже встречалось нам у Пачоли. Историю своих взаимоотношений с Кардано Тарталья расска-

L. Paccioli. Summa, л. 150.

зал в «Разных вопросах и изобретениях» (Quesiti et inventioni diversi, Venetia, 1546); впрочем, в этом сочинении, посвященном главным образом баллистике, артиллерии, фортификации и другим вопросам военного искусства, Тарталья не изложил самой теории кубических уравнений. Вероятно, он предполагал сделать это в незавершенном «Общем трактате о числах и мерах» (General trattato di numeri et misure, Venetia, 1556—1560), в вышедших из печати частях которого изложены арифметика, многие вопросы геометрии и алгебра до квадратных уравнений.

Тарталья в «Общем трактате» пользовался обозначениями, близкими к обозначениям Пачоли: $x = \text{co}$, $x^2 = \text{ce}$, $x^3 = \text{cu}$, $x^4 = \text{ce ce}$, $x^5 = \text{pri. rel.}$, $x^6 = \text{sesi.}$, $x^7 = \frac{0}{2} \text{ rel.}$ и т. д. до $x^{29} = \frac{0}{9} \text{ rel.}$ (т. е., как и Пачоли, Тарталья называл x^{25} «восемью relato»). Кардано в «Великом искусстве» пользовался латинской терминологией: $x = \text{pos}$ (positio — «положение»), $x^2 = \text{qd}^{\text{tum}}$ (quadratum), $x^3 = \text{cub}$ (cubus), $x^5 = \text{R}^{\text{m}}\text{P}^{\text{m}}$ (relatum primum), $x^6 = \text{cub } \tilde{\text{q}}^{\text{di}}$ (cubus quadrati) и т. д.

Уравнение $x^3 + ax = b$ решалось дель Ферро и Тартальей следующим образом: находились числа u и v , удовлетворяющие условиям $u - v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ (u и $-v$ являются корнями квадратного уравнения $y^2 - by - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$) и $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, т. е.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}.$$

Для решения уравнения $x^3 = ax + b$ Тарталья находил числа u и v , удовлетворяющие условиям $u + v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ (т. е. корни уравнения $y^2 - by + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$), тогда

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v},$$

т. е.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} + \frac{b}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} - \frac{b}{2}}.$$

Об уравнении $x^3 + b = ax$ Тарталья в том же стихотворении сообщал, что его можно решить при помощи уравнения $x^3 = ax + b$. Связь между этими двумя уравнениями состоит в том, что положительные корни одного из них равны модулям отрицательных корней другого. В случае, когда $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > \left(\frac{a}{3}\right)^3$, уравнение $x^3 = ax + b$ имеет один положительный корень и два мнимых, которые математики XVI в. не рассматривали. В случае, когда $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$, уравнение $x^3 = ax + b$ имеет один положительный корень и два отрицательных, и, следовательно, уравнение $x^3 + b = ax$ — два положительных корня и один отрицательный. Этот случай Кардано назвал «неприводимым», так как действительное значение x при этом является



Никколо Тарталья.
Гравюра из книги *N. Tartaglia. Regola generale
de sollevare con ragione e misure. Venezia, 1551*

суммой двух мнимых выражений, и считал неразрешимым. Заметим, что в обозначениях Кардано выражение

$$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

в примере решения кубического уравнения по «формуле Кардано» имело вид

$$R_x. v. cu. R_x. 108\tilde{p} 10 | \tilde{m}R_x. v. cu. R_x. 108\hat{m}10.$$

Полные кубические уравнения сводились к уравнениям указанного вида при помощи подстановки. Например, Кардано решал уравнение $x^3 + bx = ax^2 + c$, сводя его к решенным ранее видам уравнений при помощи подстановки $x = y + \frac{a}{3}$.

В «Великом искусстве» Кардано был изложен также открытый его учеником Луиджи Феррари (1522—1565) метод решения уравнения четвертой степени. Этот метод непосредственно применяется к уравнениям вида $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ (Кардано, пользовавшийся только положительными коэффициентами, записывал члены по обе стороны от знака равенства). Уравнение четвертой степени общего вида можно привести



Джироламо Кардано

к этому виду подстановкой $x = y + p$. Феррари заметил, что

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = x^4 + ax^2 + \frac{a^2}{4} = -bx - c + \frac{a^2}{4},$$

и добавил к обеим частям $2\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)t + t^2$. Слева получился полный квадрат $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2$, а правая часть

$$2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right)$$

является полным квадратом в том случае, когда

$$b^2 = 2t(4t^2 + 4at + a^2 - 4c).$$

Решив это кубическое уравнение и найдя один из его корней, Феррари извлекал квадратные корни из обоих полных квадратов и получил квадратные уравнения

$$x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm \sqrt{2t_0} \left(x - \frac{b}{4t_0}\right),$$

корни которых являются корнями данного уравнения.

Решение уравнений третьей и четвертой степеней в радикалах имело огромное значение для прогресса алгебры, да и всей математики. Само

по себе с точки зрения вычисления значений корней их представление с помощью радикалов не имело преимуществ перед другими приемами приближенного решения уравнений. Здесь важны были новые, глубокие теоретические вопросы, возникавшие перед наукой, и прежде всего общая проблема решения в радикалах уравнений высших степеней — проблема, во многом определившая развитие алгебры на протяжении следующих столетий и создание сначала теоретико-групповых методов исследования, а затем и самой теории групп.

Ближайшим продолжением работ Тартальи, Кардано и Феррари явилось более детальное рассмотрение неприводимого случая кубического уравнения, когда оба кубических радикала содержат квадратные корни из отрицательных чисел, между тем как корни уравнения действительны. Разъяснение этого удивительного обстоятельства с помощью свойств мнимых чисел вскоре дал Р. Бомбелли.

Мнимые величины

Мы впервые встречаемся с новым математическим объектом — мнимыми величинами в «Великом искусстве» Кардано. Кардано вводит эти величины при решении задачи деления 10 на две такие части, произведение которых равно 30 или 40 (максимальное произведение вещественных частей 10 равно 25). Кардано пишет: «Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые при перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем 40, как я объяснил тебе в главе о действиях в IV книге; тогда останется $\bar{m}$: 15; если взять от этого $\bar{R}$ и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут $5\bar{p}$: $\bar{R}\bar{m}$: 15 и $5\bar{m}$: $\bar{R}\bar{m}$: 15¹. В современных обозначениях решения Кардано имеют вид $5 \pm \sqrt{-15}$, т. е. $5 \pm i\sqrt{15}$.

Кардано называл мнимые величины «чисто отрицательными» и «софистически отрицательными». Он считал их бесполезными и стремился не применять их.

Первым математиком, оценившим пользу мнимых величин, в частности при решении кубического уравнения в «неприводимом» случае, был работавший в Болонье инженер-гидравлик Рафаэль Бомбелли (ок. 1526—1573), автор «Алгебры» (*L'Algebra*), составленной около 1560 г. и изданной в 1572 г. В первой книге этого труда, рассматривая кубические уравнения $x^3 = px + q$ в том случае, когда $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$, Бомбелли пишет, что разность $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ по извлечении квадратного корня «не может быть названа ни плюсом (*più*), ни минусом (*meno*); поэтому я буду называть ее плюсом минуса (*più di meno*), когда она должна прибавляться, а в тех случаях, когда она должна отниматься, я буду называть ее минусом минуса (*meno di meno*)... корни этого рода покажутся многим скорее софистическими, чем имеющими действительное значение, такого же мнения

¹ H. Cardanus. *Ars magna, sive di Regulis algebricis*. Basileae, 1570, л. 65 об.

держался и я до тех пор, пока не нашел доказательства на линиях»¹. Таким образом, у Бомбелли *più du meno R. q.5* означает $\sqrt{-5}$, а *meno di meno R. q.3* означает $-\sqrt{-3}$. Итальянское *più* (от латинского *plus*) значит больше, а *meno* (от *minus*) — меньше. Э. Бортолотти полагал, что терминология Бомбелли возникла из сокращения *più radice di meno* (плюс корень из минуса) и *meno radice di meno* (минус корень из минуса), но вполне возможно, что эта терминология была просто специально придумана.

Вслед за тем Бомбелли сообщает восемь правил умножения мнимых и действительных чисел, закладывая тем самым первый камень фундамента теории комплексных чисел. В наших обозначениях:

$$\begin{aligned} (\pm 1)i &= \pm i, & (+i)(+i) &= -1, & (-i)(+i) &= +1, \\ (\pm 1)(-i) &= \mp i, & (+i)(-i) &= +1, & (-i)(-i) &= -1. \end{aligned}$$

Других общих правил операций Бомбелли не приводит, но решает ряд примеров на сложение, умножение и деление вроде $8i + (-5i) = +3i$,

$$\sqrt[3]{3+i\sqrt{10}}\sqrt[3]{3-i\sqrt{10}} = \sqrt[3]{19}$$

и другие, более сложные.

Во второй книге «Алгебры» Бомбелли исследует неприводимый случай, опираясь на обнаруженную им сопряженность кубических корней из двух сопряженных комплексных чисел. Рассуждения Бомбелли можно передать следующим образом. Запишем корень уравнения

$$x^3 = px + q, \quad \text{где } \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0, \quad (1)$$

в форме

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{-b}}.$$

Если положить $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{-b}} = u \pm \sqrt{-v}$, то возведение в куб и перемножение сопряженных величин дают уравнения

$$u^3 = 3uv + a, \quad u^2 + v = \sqrt[3]{a^2 + b},$$

после чего для определения u получается уравнение

$$4u^3 = 3cu + a, \quad (2)$$

где

$$c = \sqrt[3]{a^2 + b},$$

которое имеет действительный корень u . Тем самым Бомбелли объяснил, как уравнение (1) может в неприводимом случае иметь действительный корень

$$x = u + \sqrt{-v} + u - \sqrt{-v} = 2u,$$

хотя он выражается через кубические корни из мнимых величин. Однако общего решения задачи он не получил, ибо для определения u пришел

¹ R. Bombelli. L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica. Bologna, 1572, p. 169.

опять к неприводимому случаю: уравнение (2) по существу совпадает с исходным уравнением (1), в котором $x = 2u$ (в самом деле, как легко убедиться, $a = \frac{q}{z}$ и $c = \frac{p}{3}$). Очевидно, что обойти неприводимый случай на этом пути нельзя. Все же Бомбелли смог решить путем проб отдельные числовые примеры. Так, для уравнения

$$x^3 = 15x + 4$$

корень которого выражается по правилу Тартальи в виде

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

уравнение (2) есть

$$4u^3 = 15u + 2$$

и подбор сразу дает $u=2$, так что $v=1$. Таким образом, $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$ и $x = 4$. В общей форме проблема извлечения корней из комплексных чисел была решена А. де Муавром в первые десятилетия XVIII в.

Что касается приводимых Бомбелли геометрических пояснений «на линиях», то в них нет ничего общего с геометрическим истолкованием комплексных чисел.

К неприводимому случаю кубического уравнения мы еще обратимся далее (стр. 314).

Бомбелли внес некоторые усовершенствования в алгебраическую символику; для обозначения неизвестной величины он надписывал над ее числовым коэффициентом показатель степени, стоящий над небольшой дугой. Например, уравнение

$$8 = 4x^2 + 4x$$

он записывал в виде

$$8 \text{ eguale } \acute{a} 4 \cdot p \cdot \overset{2}{4};$$

здесь итальянское слово *eguale* значит «равно», а p — есть сокращение слова *pù*. Эти обозначения Бомбелли, несколько сходные с обозначениями степеней у Шюке, оказали влияние на алгебраическую символику С. Стевина.

Бомбелли был последним в блестящей плеяде итальянских алгебраистов XVI в.

Михаэль Штифель

Крунейшим из коссистов был уроженец Вюртемберга Михаэль Штифель (1486—1567). В молодости монах-августинец, Штифель, примкнул к реформации, возглавляемой принадлежавшим к тому же ордену Лютером, и стал протестантским пастором. Вначале Штифель занимался мистическими изысканиями по поводу чисел, встречающихся в священных книгах, и «вычислил», что 19 октября 1533 г. будет конец мира. После того как предсказанный им конец мира не состоялся, Штифель, видимо желая найти причину своей ошибки, занялся математикой всерьез и вскоре

сделался одним из крупнейших ученых своего времени. Штифель написал на латинском языке «Полную арифметику» (*Arithmetica integra*, Norimbergi, 1544) и на немецком языке «Немецкую арифметику» (*Deutsche Arithmetik*, Nürnberg, 1545) и «Алгебру Кристофа Рудольфа с прекрасными примерами алгебры, улучшенную и весьма увеличенную Михаэлем Штифелем» (*Die Coss Christoffs Rudolffs, mit schönen Exempeln der Coss, durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, Königsperg im Preussen, 1553*); последняя книга представляла собой переработку учебника Рудольфа, добавления к которому превосходили оригинальный текст.

В «Полной арифметике» Штифель называл x^5 не *Sursolidum*, а *surdesolidum*, x^7 — не *Bissursolidum*, а *bissurdesolidum* и обозначал $b\beta$, далее он обозначал $x^{11} = c\beta$, $x^{13} = d\beta$, $x^{17} = e\beta$ и т. д. (приведенное нами название Магницкого для x^5 восходит к этому названию Штифеля). В дополнениях к «Алгебре» Рудольфа Штифель называл x^7 *Bsursolidum* и обозначал $B\beta$ и далее обозначал $x^{11} = C\beta$, $x^{13} = D\beta$, $x^{17} = E\beta$, $x^{19} = F\beta$, $x^{23} = G\beta$.

Размышляя по поводу термина *Sursolidum* и других терминов коссистов, Штифель пришел к идее многомерного обобщения куба. Определив геометрическую прогрессию $1, a, a^2, a^3, \dots$, Штифель говорит: «Такие прогрессии называются по истинным геометрическим прогрессиям в собственном смысле слова, в которых первой воображается точка как начало линий. Вторым проводится линия (длинная или короткая). Третьим [строится] плоская квадратная фигура, называемая по мере проведенной линии по длине и ширине. Четвертым следует куб, для которого проведенная линия является кубическим корнем или мерой по всем трем его измерениям — длине, ширине и толщине. А дальше геометрическая прогрессия не переходит к другим большим измерениям. Поэтому всякую геометрическую прогрессию переводят в арифметику: единица для точки, первое число — для линии, второе число — для квадратной плоской фигуры и третье число — для кубического тела. Если в арифметике мы видим, что нам разрешается сочинять многие вещи, даже если они совсем не имеют формы, в геометрии не разрешается предположить телесные линии и поверхности (*cörperliche linien und superficies*) и выйти за пределы куба, как если бы было больше, чем три измерения (*über den cubum hinaus faren gleych als weren mehr denn drey dimensiones*), так как это было бы противоестественно. В этом случае геометрическая прогрессия шла бы дальше и дальше без всякой цели и конца, куб полагался бы за телесную точку, за которой полагали бы телесную линию, за ней — телесную поверхность, а за ней полагали бы куб, за которыми шли бы дальше, как сейчас указано, но не останавливаясь. Но следовало бы сделать здесь доброе снисхождение из-за красивого и чудесного применения алгебры»¹.

Понимая линию как след движущейся точки, Штифель называет куб телесной точкой, а под телесной линией и поверхностью он понимал результат движения трехмерного куба в одном или двух направлениях, перпендикулярных всем измерениям куба. В другом месте, обобщая понятие телесной линии, Штифель определяет «коссическую линию» как след движущейся величины любой размерности. Он иллюстрирует это следом движущейся линии ac : если эта линия движется вдоль линии ab , то прямоугольник $abcd$ — «коссическая линия».

¹ Die Coss Christoff Rudolffs mit schönem Exempeln der Coss durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt. Königsperg im Preussen, 1553, л. 9—9 об.

Формула бинома

В рукописи «Initius Algebras» приводятся словесные формулировки формул «бинома Ньютона» $(a + b)^n$ при $n = 3, 4, \dots, 9$, причем при $n = 3$ дается геометрическая интерпретация с помощью разложения куба на два куба a^3 и b^3 и шесть параллелепипедов a^2b и ab^2 (рис. 75). Биномиальные коэффициенты здесь вычисляются очень наглядным способом, путем возведения в степени числа 10001 в виде таблицы:

```

1000900360084012601260084003600090001
100080028005600700056002800080001
10007002100350035002100070001
1000600150020001500060001
100050010001000050001
10004000600040001
1000300030001
100020001
10001
    
```

Возможно, что правила «бинома Ньютона», содержащиеся в рукописи Initius Algebras, имелись еще в ее арабском прототипе, так как общие правила возведения бинома в любую степень встречались в арифметических трактатах ат-Туси и ал-Каши.

В печати таблица биномиальных коэффициентов появилась впервые в «Новом и хорошо обоснованном наставлении по арифметике для всех купцов» (Eyn Neue Vund wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanns Rechnung, Ingolstadt, 1527) Петра Ашиана (Петер Биневиц, 1495—1552); геометрическая интерпретация формулы $(a + b)^3$ имеется и в «Алгебре» Рудольфа.

В «Полной арифметике» Штифеля приведена словесная формулировка формулы бинома для любого натурального показателя и таблица биномиальных коэффициентов в виде таблицы, в которой каждый элемент образуется как сумма элементов предыдущей строки, стоящих над ним и слева от него:

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
.	.	.	.				
.	.	.	.				
.	.	.	.				
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

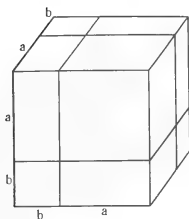


Рис. 75

В обработке «Алгебры» Рудольфа Штифель применил введенные им многомерные обобщения куба для иллюстрации формулы бинома при $n > 3$. Приведа иллюстрацию Рудольфа для $n = 3$ («куб Кристофа»), Штифель пишет: «Так же как квадратные биномы разлагаются на 4 части, а кубические — на 8 частей, квадрато-квадратные биномы (die Binomia zensizensica) разлагаются на 16 частей, а сверхтелесные (die sursolida) — на 32 части и подобно этому идет по двукратной прогрессии»¹.

Тарталья в своем «Общем трактате о числе и мере» придал таблице биномиальных коэффициентов следующий вид:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

Здесь каждое число является суммой чисел, стоящих перед ним и над ним, а коэффициенты различных степеней бинома расположены по диагоналям, соединяющим числа первого столбца с числами первой строки, имеющими тот же порядковый номер.

Десятичные дроби и алгебраические обозначения Стевина

В средневековой Европе, как и в странах ислама, широко применялись шестидесятиричные дроби. Мы уже упоминали о приближенном решении кубического уравнения, найденном Леонардо Пизанским в шестидесятиричных дробях. Глава о шестидесятиричных дробях имеется в «Арифметике» Магницкого под названием «Арифметика — логистика или астро-

¹ Die Coss Christoffs Rudolffs, л. 482 об.

номская». Заметим, что Магницкий наряду с градусами, минутами и секундами определяет также целые степени 60: «первую сексагену» (от латинского *Sexaginta* — 60), равную 60 градусам, «вторую сексагену», равную 60 первым, и т. д., — аналогичные «поднятому», «второму поднятому» и т. д. у математиков стран ислама.

Особенно широко применялись шестидесятиричные дроби в астрономических вычислениях и таблицах, поэтому-то нередко они назывались астрономическими; иногда их называли также физическими или философскими. Некоторые ученые, например Оронс Фине или в латинизированной форме Финеус (1494—1555), первый профессор математики в основанном около 1530 г. и впоследствии столь знаменитом парижском Коллеж де Франс, распространяли шестидесятиричный счет на целые числа, однако в Европе, в отличие от стран ислама, эти попытки почти не имели успеха. Напротив, десятичный счет получал постепенно все более широкое распространение и в астрономических выкладках. Воспитанник и лектор Венского университета Георг Пейербах (1423—1461) в своих неопубликованных таблицах синусов соединил шестидесятиричный и десятичный принципы: он выразил значения синусов в целых десятичных числах при радиусе круга, равном $60 \cdot 10^4$. Примеру Пейербаха последовал сначала его ученик Иоганн Мюллер (Регiomонтан), о котором будет подробнее сказано далее, причем взял радиус равным $60 \cdot 10^5$. Но затем Региомонтан отказался от шестидесятиричности и в 1467 г. составил первые чисто десятичные тригонометрические таблицы — таблицы тангенсов при радиусе 10^5 , посмертно изданные в Аугсбурге в 1490 г. Правда, при этом, как и в различных других таблицах той поры, значения тригонометрических величин выражались в целых числах, но отсюда уже было недалеко до десятичных дробей. Такие дроби применяются в «Математическом каноне» (*Canon mathematicus*) французского математика XVI в. Ф. Виета, опубликованном в Париже в 1579 г. (стр. 308).

В этом сочинении, представляющем собой собрание таблиц синусов, тангенсов и секансов вместе с изложением плоской и сферической тригонометрии, Виет решительно выступил в пользу употребления, как он выражался, тысячных и тысяч, сотых и сотен, десятых и десятков и т. д. взамен шестидесятиричной системы целых и дробей. При записи десятичных дробей Виет не придерживался какого-либо одного обозначения. Передко он пишет как числитель, так и знаменатель, иногда отделяет цифры целой части от дробной вертикальной чертой (скажем, синус 60° при $r = 100\,000$ есть $86,602 \mid 540,37$), или же цифры целой части изображает жирным шрифтом (длина полукружности при том же радиусе есть $314,159,265,36$, или, наконец, цифры дробной части дает более мелким шрифтом и подчеркивает (сторона вписанного квадрата при том же радиусе есть $141,421,356,24$).

Значение систематических дробей, представляющих собой суммы последовательных степеней одного и того же основания, подчеркивалось в математической литературе неоднократно, начиная по крайней мере с арифметики Иоанна Севильского. В анонимном «Алгоризме дробей» (*Algorismus de minutis*) XVI в. при этом указывается, что вместо основания 60 можно взять и другое, скажем 12 или 10. Во второй половине того же века систему десятичных дробей описал Иммануил Бонфис из Тараскона, один из представителей процветавшей тогда в Южной Франции школы еврейских астрономов и математиков. В трактате «Путь деления», написанном на древнееврейском языке, Бонфис строит систему дробей,



Симон Стевин

в которой $1 = 10$ примам, 1 прима $= 10$ секундам, 1 секунда $= 10$ терциям и т. д., и кратко объясняет правила основных операций. Это сочинение не получило, по-видимому, известности у современников; оно было обнаружено около 30 лет тому назад.

Широкое распространение десятичных дробей в Европе началось только после выхода в свет «Десятой» (De Thiende, La Disme) фламандского математика Симона Стевина (1548—1620). Стевин, уроженец Брюгге, вначале был купцом, затем во время Нидерландской революции инженером в войсках возглавлявшего республику Морица Оранского. В 1585 г. в книге «Десятая» (стр. 305), определив десятичные дроби, он с большим пылом агитирует как за повсеместное введение десятичных дробей, так и за введение десятичной системы мер и монет. В том же году Стевин выпускает в Лейдене «Арифметику» (L'arithmétique), где излагает не только арифметику, но и алгебру. Стевин обозначает целые знаком 0, десятые — знаком 1, сотые — знаком 2 и т. д., причем цифры 0, 1, 2, ... стоят над значащими цифрами или после них в кружках. Например, 5,912 Стевин обозначал

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

или 5 ⑨ ① 1 ② 2 ③

Те же обозначения ①, ①②, ③, ..., Стевин применяет и для степеней неизвестных. Эти символы (Стевин называл их «характерами» — *characteres*) похожи на применявшиеся Бомбелли, но коэффициенты Стевин помещал слева от «характера», а не под ним, как итальянский ученый. Знак © служил для выражения произвольного данного числа, в частности свободного члена уравнений.

Важный шаг вперед в сравнении с символикой Бомбелли заключался во введении знаков степеней нескольких неизвестных. Для этого Стевин ставил перед своими символами сокращения *sec.* (*secunda* — вторая) или *ter.* (*tertia* — третья). Выражение $\frac{5x^2z^3}{y}$, например, у него имеет вид 5 ② *D* *sec.* ① *M* *ter.* ③, здесь *D* и *M* — сокращения слов «делить» (*dividere*) и «умножать» (*multiplicare*). Те же символы Стевин употребляет для извлечения корней, причем в двух формах. Так, кубический радикал изображается то $\sqrt[3]{\textcircled{3}}$, то $\sqrt[3]{\textcircled{1}}$. Для произвольного коэффициента у Стевина еще не было знака, и, скажем уравнение $ay = xy + bx^2$ он записывал так: «несколько *sec.* ① равны 1 ① *M* *sec.* ① + несколько ②», причем коэффициент при *y* назывался «числом *sec.* ①», то «числом множества *sec.* ①»¹. Громоздкая символика Стевина нашла мало сторонников. Еще при его жизни Ф. Виет ввел специальные знаки для произвольных коэффициентов алгебраических выражений.

Иррациональные числа

Европейские математики Средних веков и эпохи Возрождения вслед за математиками стран ислама широко пользовались арифметическими действиями над квадратными корнями из чисел, а также из выражений, содержащих квадратные корни, и применяли к этим выражениям термины *X* книги «Начал» Евклида «биномиали», «вычеты», «медиади», «бимедиади» и т. д. Большинство используемых нами терминов этого вида являются латинскими, восходящими именно к этим терминам математиков средневековой Европы. Мы находим их уже у Леонардо Пизанского, который дополнил терминологию Евклида «триномиалью», обозначающую сумму трех квадратных корней. Арифметические действия с квадратичными иррациональностями мы встречаем и в «Сумме» Луки Пачоли, и в «Общем трактате» Тарталья, и в сочинениях Кардано. Исключительно подробно на этой теории останавливаются Кристоф Рудольф в «Алгебре» и Михаэль Штифель в своих дополнениях к ней: эта теория занимает почти половину книги Рудольфа и Штифеля, столько же занимает эта теория в «Полной арифметике» Штифеля.

Однако итальянские и немецкие математики XV—XVI вв., которые, по существу, обращались с иррациональностями как с числами, все же не решились порвать с традициями, исключаящими их из области настоящих чисел. Радикально противоположную позицию занял Симон Стевин. В «Арифметике» он определил число как «что, с помощью чего выражается количество всякой вещи»², и полагал, «что число является непрерывным количеством, и что, в частности, единица делима». Там же он остроумно

¹ *S. Stevin. The principal works*, v. II, B. Amsterdam, 1958, p. 679.

² Там же, v. II, B., p. 495.

DE
T H I E N D E

Leerende door onghehoorte lichticheyt
allen rekeningen onder den Menschē
noodich vallende, afveerdighen door
heele ghetalen sonder ghebrokenen.

Beschreven door SIMON STEVIN
van Bruggbe.



TOT LEYDEN,
By Christoffel Plantijn
M. D. LXXXV

Титульный лист первого издания «Десятой» Стевина

критиковал принятые в то время наименования и прямо заявлял, что «нет никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, невыразимых или глухих чисел»¹. С некоторой осторожностью Стевин включал в понятие числа и отрицательные числа. Эта концепция единого понятия действительного числа, полностью восторжествовавшая в XVII в. в работах Валлиса и Ньютона, имела важнейшее значение для дальнейших успехов алгебры и ее приложений в геометрии, приведших к появлению математики переменных величин.

Дробные показатели

В XVI в. получило дальнейшее развитие и учение Орема о дробных показателях. Развитие этого учения сыграло существенную роль в подготовке изобретения логарифмов в начале XVII в.

Дробные показатели применял Тарталья в «Общем трактате о числах и мере». Тарталья рассуждает так же, как Орем, и, в частности, говорит:

«Четвертая часть отношения 5 к 4 равна отношению $R_x 5$ к $R_x 4$ » (т. е. $\sqrt[4]{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\frac{5}{4}} = \sqrt{\sqrt[4]{5}} : \sqrt{\sqrt[4]{4}}$), «произведение отношения 5 : 4 на $\frac{2}{3}$ равно отношению 25 к R_x 10 000» (т. е. $(\frac{5}{4})^{2/3} = 25 : \sqrt[3]{10000}$), «частное от деления отношения 2 : 1 на $\frac{3}{4}$ равно отношению R_x 16 к 1» (т. е. $2^{4/3} = \sqrt[3]{16}$)².

Дробными показателями систематически пользовался также Стевин, обозначавший, например, степень неизвестной $\frac{2}{3}$ в виде ③.

Дальнейшим развитием идей Тарталья является определение деления отношения на отношение в «Полной арифметике» Штифеля: «Подобно тому, как можно определенное количество локтей делить либо на некоторое количество локтей, либо же на отвлеченное число, так можно и отношение делить либо на отвлеченное число, либо на отношение». Штифель предлагает следующий алгоритм деления на отношение: «Вычитай делительное отношение, пока либо получится равенство [т. е. не будет остатка], либо изменится род отношения [т. е. отношение, бывшее больше 1, станет меньше 1]. Частное состоит тогда из суммы единиц, которыми отмечаются отдельные вычитания, ибо для каждого производимого вычитания надо брать одну единицу»³.

Далее Штифель приводит пример деления $\frac{729}{64}$ на $\frac{3}{2}$. «Вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{729}{64}$, т. е. находя отношение, которое, будучи составлено с отношением $\frac{3}{2}$, даст $\frac{729}{64}$, Штифель находит отношение $\frac{243}{32}$ (по современной терминологии «вычитание» Штифеля есть деление и $\frac{729}{64} : \frac{3}{2} = \frac{243}{32}$). «Вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{81}{16}$, он получает $\frac{27}{8}$, «вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{27}{8}$, получает $\frac{9}{4}$, «вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{9}{4}$, получает $\frac{3}{2}$ и, «вычитая» $\frac{3}{2}$ из $\frac{3}{2}$, полу-

¹ S. Stevin. The principal works. v. II, B, стр. 536.

² N. Tartaglia. General trattato di numeri et misure, v. 3. Venetia, 1560, p. 126—127.

³ M. Stifel. Arithmetica integra. Norimbergae, 1544, л. 53 об.

часть $\frac{1}{4}$. Так как было произведено шесть «вычитаний», частное от «деления» равно 6. В другом примере, «деляя» $\frac{2187}{128}$ на $\frac{27}{8}$, Штифель после трех «вычитаний» получает отношение $\frac{4}{9} < 1$, а после двух вычитаний был «остаток» $\frac{3}{2}$, являющийся «третью» делительного отношения, поэтому «частное» равно $2\frac{1}{3}$. По современной терминологии, задачи Штифеля представляют собой уравнения $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{729}{64}$ и $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$, решения которых суть

$$\log_{3/2} \frac{729}{64} = 6 \text{ и } \log_{27/8} \frac{2187}{128} = 2\frac{1}{3}.$$

В связи с «делением отношений» Штифель, вслед за Шюке приводил сопоставление арифметической прогрессии $-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ и геометрической прогрессии $\frac{1}{a^n}, \dots, \frac{1}{a}, 1, a, \dots, a^n$ и ввел термин «показатель» (exponents) для членов первой прогрессии.

Алгебра Петра Рамуса

Коссистские названия степеней были реформированы Петром Рамусом (Пьер де ла Раме, 1515—1572), французским протестантом (гугенотом), погибшим во время резни гугенотов, известной под названием «Варфоломеевская ночь». Рамус был профессором философии Парижского университета. Он был сторонником реформации не только в религии: в философии он боролся против авторитета Аристотеля и был предшественником Фрэпсиса Бэкона (1561—1626) в критике аристотелевской логики. После того как указом короля Рамусу было запрещено учить или писать против Аристотеля, он перенес свою реформаторскую деятельность в математику. Его «Курс математики в тридцать одной книге» (*Scholarum mathematicorum libri unus et triginti*, Basileae, 1569) включал, в частности, изложение «Начал» Евклида, но также в реформированном, именно весьма упрощенном и облегченном виде. В этом курсе Рамус пытался дать математике новое обоснование, основанное на арифметике. В «Двух книгах по арифметике и стольких же по алгебре» (*Arithmeticae libri duo et Algebrae totidem*), изданных в 1586 г. во Франкфурте уже после гибели Рамуса, степени назывались: x — *latus* («сторона», сокращенно *l*), x^2 — *quadratus* (*q*), x^3 — *cubus* (*c*), x^4 — *biquadratus* (*bq*), x^5 — *solidus* («тело», *s*), x^6 — *quadratocubus* (*qc*), x^7 — *bisolidus* (*bs*), x^8 — *triquadratus* (*tq*).

О влиянии Рамуса за пределами родной Франции, а также Швейцарии и Германии, где был напечатан ряд его книг, свидетельствует «Арифметика» Магницкого, где наряду с коссистскими названиями и знаками встречаются также заимствованные у Рамуса: биквадрат, солидус, квадратокубус, бисолидус, триквадрат, бикубус и т. д.

Алгебра Франсуа Виета

Коренные улучшения в алгебраическую символику ввел, как упоминалось, Франсуа Виет, принадлежащий к числу самых замечательных математиков рассматриваемой эпохи. Виет (1540—1603), уроженец Фонтене-ле-Конт во французской провинции Пуату, юрист по образованию, с девятнадцати лет занялся адвокатской практикой в родном городе. Преподавая астрономию дочери одной из своих знатных клиенток, он увлекся этой наукой и пришел к мысли составить труд, посвященный усовершенствованию птолемеевой системы, ибо систему Коперника он считал неудовлетворительной; часть этого сочинения увидела свет в 1637 г. Вместе с тем Виет приступил к разработке тригонометрии и около 1570 г. подготовил уже упоминавшийся «Математический канон», который издал позднее в Париже (1579 г.). В 1571 г. Виет переехал в Париж, где свел знакомство с местными математиками, в том числе Рамусом. Вскоре, в 1573 г., он перешел на государственную службу. Отчасти благодаря браку своей ученицы с принцем де Рогапом Виет сделал блестящую карьеру и стал советником сначала короля Генриха III, а после его смерти — Генриха IV. Громкую славу при дворе ему принесла расшифровка переписки врагов Генриха III. Но главной страстью Виета была математика, и ей отдавал он свой досуг. Ей же он посвятил 1584—1589 гг., когда по требованию влиятельных недругов был отстранен от дел. За эти годы он особенно глубоко изучил изданные незадолго перед тем сочинения классиков — Архимеда, Диофанта и др., а также своих ближайших предшественников — Кардано, Тарталья, Бомбелли, Стевина; вместе с тем он далеко продвинулся в создании новой символической алгебры.

Из многочисленных математических сочинений Виета только часть была опубликована при его жизни, многие увидели свет посмертно, а некоторые остались в рукописях. В издании некоторых трудов участвовали ученики Виета: шотландец Александр Андерсон (1582—1619) и югослав из Дубровника (Рагузы) Марин Геталдич или Гетальди (1566—1627). Наиболее полное издание Виета, в которое не вошел, однако, «Математический канон», выпустил видный последователь Декарта Фр. ван Schooten, — это «Математические сочинения» (*Opera mathematica*), вышедшие в Лейдене в 1646 г. К сожалению, до сих пор никто не взялся за работу, весьма, правда, нелегкую, по подготовке нового полного издания трудов этого классика математики.

Общие идеи и основные принципы новой алгебры Виет изложил во «Введении в аналитическое искусство» (*In artem analyticem Isagoge*, Turonis, 1591), которое должно было составить начало большого всеобъемлющего алгебраического трактата. Целью Виета является преобразование прежней алгебры в мощное математическое исчисление. «Искусство, которое я излагаю, — писал он, — ново, или по крайней мере настолько испорчено временем и искажено влиянием варваров, что я счел нужным придать ему совершенно новый вид», и далее: «Все математики знали, что под их алгеброй и алмукабалой были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти; задачи, которые они считали наиболее трудными, совершенно легко решаются десятками с помощью нашего искусства, представляющего поэтому самый верный путь для математических изысканий»¹. При этом новая алгебра делится на две части — одну, имеющую

¹ Цит. по французскому переводу М. Ф. Питтепа: *Fr. Viète. Introduction à l'art analytique. Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche*, v. I, 1868, p. 227.



Франсуа Виет

дело с общими величинами, и другую, опирающуюся на первую и имеющую дело с числами; слабым пунктом древних аналитиков было как раз употребление только конкретных чисел, между тем как новое аналитическое искусство черпает силу именно в рассмотрении общих величин.

Общую алгебру Виет называл *logistica speciosa*, т. е. видовой логистикой: термин «логистика» у греков обозначал совокупность арифметических приемов вычислений, а термин «вид» имел здесь тот же смысл, что «символ» (латинское *species* значит среди прочего вид и образ, а греческое *σύμβολον* — знак, образ и т. д.). Предметом видовой логики является система математических объектов, частью геометрических, частью псевдогеометрических, связанных между собой отношениями, аналогичными арифметическим. Эти объекты образуют шкалу, лестницу величин и суть сторона или корень, квадрат, куб, квадрато-квадрат, квадрато-куб и еще бесконечное множество других скаляров (*scalares*), принадлежащих к различным реальным или фиктивным размерностям — длине или ширине, площади, объему, площади-площади, площади-объему и т. д. Сложение, вычитание и приравнивание скаляров подчинены, как и в древней математике, «закону однородности».

Когда величины выражены числами, они и отношения между ними образуют предмет *logistica numerosa*, т. е. числовой логики. Между обеими частями алгебры существует тесная связь, и многие управляющие ими

законы находятся в прямом соответствии. Так, умножению чисел соответствует «проведение» (*ductio*) одного скаляра по другому, именно образование нового скаляра, размерность которого равна сумме размерностей данных величин; аналогично делению соответствует приложение (*applicatio*) скаляров. Благодаря такому соответствию результаты видовой логики оказывается возможным применять и к задачам геометрии и к числовой логистике. Но эти две алгебры отнюдь не тождественны, и, в частности, система скаляров не обладает свойствами ни поля, ни кольца.

Видовой логистике Виет сообщил требуемую общность, создав символику, в которой впервые появились знаки не только неизвестных, но и произвольных, т. е. переменных данных величин. В качестве знаков скаляров он принял прописные буквы алфавита, гласные для неизвестных и согласные для известных. Необходимы, писал Виет, наглядные и всегда одинаковые символы, позволяющие отличать данные величины от неизвестных, например, тем, что «искомые величины будут обозначены буквой *A* или другой гласной *E, I, O, U, Y*, а данные — буквами *B, D, G* или другими согласными»¹. Это нововведение и особенно применение буквенных коэффициентов положило начало коренному перелому в развитии алгебры: только теперь стало возможным алгебраическое исчисление как система формул, как оперативный алгоритм. Между прочим, само слово «коэффициент» восходит к Виету, который употреблял его, правда, в несколько специальном смысле, в «Первых замечаниях к видовой логистике» (*Ad logicam speciosam notae priores, Parisii, 1631*), где вслед за «Введением» приводятся различные преобразования алгебраических формул. Рассматривая выражение типа

$$(A + B)^2 + D(A + B),$$

Виет называл величину *D*, участвующую вместе с $A + B$ в образовании прямоугольника $D(A + B)$, *longitudo coefficientis*, т. е. содействующей длиной. Далее это выражение встречается не раз².

Из знаков действий Виет употреблял $+$ и $-$, произведение выражал словом *in* (в смысле «на»), в случае приложения ставил разделительную дробную черту; кроме того, черта над многочленом играла у него роль скобок (впрочем, случалось, что он применял фигурные скобки). Степени он обозначал, приставляя к соответствующей букве слова *quadratum*, *cubus* и т. д. или же их сокращения. Так, в «Дополнении к геометрии» (*Supplementum geometriae, Turonis, 1593*) наше кубическое уравнение

$$x^3 - 3r^2x = r^3$$

записано в виде

$$A \text{ cubus minus } Z \text{ quadrato ter in } A \text{ aequatur } Z \text{ cubo.}$$

Здесь соблюден, как видно, закон однородности и слово *ter* означает «трижды», а *aequatur* — «равняется». Обозначения степени неизвестной в числовой логистике были проще: *1.N* (от *numerus* — число), *Q* (от *qua-*

¹ *Fr. Viète. Introduction à l'art analytique*, p. 232.

² См. французский перевод М. Ф. Питрепа: *Fr. Viète. Première série de notes sur la Logistique spécieuse*, Bollettino di bibliografia e storia di scienze matematiche e physique, v. 1, 1868, p. 257.

dratum), C (от cubus) и т. д. В качестве числового примера только что написанного общего уравнения Виет приводит $1C - 3N$ aequatur 1 (т. е. $x^3 - 3x = 1$). Употребляя для обозначения величин прописные, а не строчные буквы, Виет следовал древним грекам.

Своей символикой Виет пользовался регулярно; очень часто решение задачи в буквенном виде он сопровождал числовыми примерами. Его символику применяли и некоторые другие математики, среди них знаменитый П. Ферма, вплоть до середины XVII в. Для нас очевидны недостатки обозначений Виета. Неудобным было словесное обозначение степеней, имеющее первостепенное значение в символической алгебре; к тому же Виет последовательно прилагал его только к неизвестным величинам, между тем как необходимую размерность буквенных коэффициентов устанавливал, приписывая рядом с буквой слова *planum* (плоскость) и *solidum* (тело) и их комбинации или их сокращения. Вот как выглядит, например, уравнение $x^3 + 3B^2x = 2z^3$ в сочинении «Об анализе и усовершенствовании уравнений» (De aequationum recognitione et emendatione, Parisii, 1615) в издании 1646 г.:

A cubus $\div B$ plano 3 in A aequari Z solido 2:

а вот выражение его корня по правилу Тартальи:

$$\sqrt[3]{C \sqrt[3]{B \text{ plano} - \text{plano} - \text{plani} \div Z \text{ solido} - \text{solido} \div Z \text{ solido} - \\ - \sqrt[3]{C \sqrt[3]{B \text{ plano} - \text{plano} - \text{plani} \div Z \text{ solido} - \text{solido} - Z \text{ solido}}}}$$

Громоздкость такой символики, обусловленная, в частности, требованием однородности, вскоре стала очевидной. Трудность, связанная с обозначением степеней, непригодная для распространения на произвольные показатели, выявилась несколько позднее.

Свое символическое исчисление Виет применил к обширному кругу задач алгебры. Прежде всего следует отметить вслед с разработкой общего аппарата алгебраических преобразований весьма полное аналитическое изложение теории уравнений первых четырех степеней. Мы приведем лишь два результата, относящихся к этому кругу вопросов. Во-первых, в своем «Усовершенствовании уравнений» Виет очень изящно и просто свел кубическое уравнение вида $x^3 + 3ax = 2b$ с помощью преобразования $y^2 + xy = a$ к уравнению $y^6 + 2by^3 = a^3$, квадратному относительно y^3 . Во-вторых, в «Дополнении геометрии» он показал, что решение любого кубического уравнения приводится либо к вставке двух средних пропорциональных, либо к трисекции угла, и с помощью тригонометрических средств дал решение неприводимого случая. Если записать уравнение $x^3 - px = q$ в виде $x^3 - 3r^2x = ar^2$, причем $p = 3r^2$ и $q = ar^2$, то неприводимый случай имеет место, когда $r > a/2$. Сопоставляя уравнение с известным соотношением

$$\cos 3u = 4 \cos^3 u - 3 \cos u,$$

можно положить $a = 2r \cos 3u$; тогда решением уравнения будет

$$x = 2r \cos u$$

и дело сводится к отысканию $\cos u$ по данному $\cos 3u$. Для примера Виет решил указанное выше уравнение $x^3 - 3x = 1$, для которого $x = 2 \cos 20^\circ$,

причем $\cos 20^\circ = 0,93969262$. Аналогично сводится к трисекции угла неприводимый случай для уравнений вида $x^3 + q = px$.

Виету были также известны алгебраические уравнения, соответствующие делению угла не только на три, но и на пять или на семь равных частей. Более того, он знал общие законы разложения $\cos mx$ и $\sin mx$ по степеням $\cos x$ и $\sin x$. Именно это позволило Виету сразу решить в 1594 г. следующее уравнение 45-й степени с числовыми коэффициентами, предложенное в качестве вызова всему ученому миру голландцем Адрианом ван Роуменом (1561—1615):

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - \dots + 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a$$

при

$$a = \sqrt{1 \frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{1 \frac{7}{8}} - \sqrt{\frac{45}{64}}.$$

Виет немедленно увидел, что a есть сторона правильного 15-угольника, вписанного в круг радиуса 1, или же хорда дуги в 24° , а по коэффициентам первого и предпоследнего членов заключил, что x есть хорда $1/45$ этой дуги, как оно и было в самом деле. Вслед затем, на другой день, он нашел еще 22 корня уравнения, описываемые выражением

$$2\sin \frac{n \cdot 360^\circ + 12^\circ}{45}$$

при $n = 1, 2, \dots, 22$. Этим он ограничился: остальные 22 корня отрицательные, а Виет не принимал ни отрицательных, ни мнимых корней, которые не соответствовали его «скалярам».

Идея применения трансцендентных функций к решению алгебраических уравнений получила новое развитие во второй половине XIX в., прежде всего у Ш. Эрмита, Л. Кронекера (решение уравнения пятой степени с помощью эллиптических функций).

Виету же принадлежат первые значительные успехи в общей теории алгебраических уравнений. В сочинении «Об анализе и усовершенствовании уравнений» он применяет свой символический аппарат к разработке отдела о преобразованиях корней уравнений. Линейную подстановку вида $x = y + h$, примененную Кардано для уничтожения члена второй степени в кубическом уравнении, он распространяет на уравнения произвольной степени (и, в частности, сводит таким образом трехчленное квадратное уравнение к двучленному). Точно так же распространяет он известную Кардано обратную подстановку $x = k/y$, используя ее для освобождения в отдельных случаях от иррациональностей и отрицательных коэффициентов; например, уравнение $x^4 - 8x = \sqrt[3]{80}$ он переводит заменой $x = \sqrt[3]{80}/y$ в $y^4 + 8y^3 = 80$. Линейная подстановка вида $x = ky$ употребляется для избавления от дробей в коэффициентах и для перевода данного уравнения степени n в другое с данным коэффициентом в члене степени $n - 1$ при условии, что коэффициент старшего члена остается равным единице.

При рассмотрении некоторых трехчленных уравнений выявляется, между прочим, недостаточность символики Виета для обозначения произвольных степеней, о чем упоминалось ранее. Так, например, уравнению

$$bx^m - x^{m+n} = c$$

у него соответствует

B parabola in A gradum — A potestate aequatur Z homogeneae,

что можно перевести примерно так: *B*, приложенное к градусу *A*, — *A* в степени равняется однородной *Z*.

Особенный интерес и в рассматриваемом труде имеет исследование вопроса об образовании уравнений с данными корнями и примыкающего вопроса о зависимостях между корнями и коэффициентами уравнений. На примерах уравнений от второй до пятой степени с положительными корнями и коэффициентами при старшем члене, равном 1 или -1 (свободный член берется в правой части со знаком «плюс»), Виет показывает, что коэффициенты при x^{n-1} , x^{n-2} , x^{n-3} и т. д. суть взятые с чередующимися знаками сумма корней, сумма произведений пар корней, троек корней и т. д. И здесь Виет пошел далее своих предшественников: соответствующее предложение для квадратного уравнения явно высказал только Кардано (хотя, по существу, по крайней мере для положительных корней, оно было известно гораздо ранее) и Кардано же заметил это свойство у коэффициента при члене второй степени кубических уравнений.

Только что приведенным замечанием Виет, по его собственным словам, завершает и увенчивает свое сочинение, ссылаясь на более подробное изложение в другом месте. Однако такое изложение до нас не дошло, и мы не знаем, зафиксировал ли Виет в печати или письменно, очевидно, известный ему прием составления уравнений с помощью перемножения множителей первой степени, а также общую трактовку случая, когда имеются отрицательные корни. Последнее, впрочем, для него не представляло труда: было достаточно привлечь к рассмотрению положительные корни уравнения, получаемого из данного подстановкой $x = -y$; частные примеры такого рода у него встречаются. Например, если уравнение $x^3 + q = px$ имеет два положительных корня x_1 , x_2 , то уравнение $y^3 = py + q$ — один положительный корень $y_1 (= -x_3)$ и $y_1 = x_1 + x_2$ (что знал уже Кардано),

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = p, \quad x_1x_2(x_1 + x_2) = q.$$

В рассмотренных Виета содержались первые ростки теории симметрических функций и разложения целых многочленов на множители первой степени, которые немного спустя привели и к открытию основной теоремы алгебры о числе корней уравнения любой степени. В этом направлении его исследования были продолжены в ближайшие десятилетия Т. Гарриотом, А. Жираром и Р. Декартом.

В трактате «О численном решении чистых и связанных степеней с доказательством» (*De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesis resolutione*, 1591, опубликовано Гетальди в Париже в 1600 г.) Виет разработал метод приближенного решения алгебраических уравнений с числовыми коэффициентами. Прежде всего он рассматривает случай чистых степеней, т. е. двучленные уравнения $x^n = q$, решение которых представляет собой извлечение корня. Для связанных степеней, т. е. многочленных уравнений, метод Виета является развитием метода извлечения корней, родственного тем методам, которые ранее применялись математиками Востока. Положительный корень уравнения ищется в форме $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, где x_n — единицы, x_{n-1} — десятки и т. д.;

значения $x_1, x_2, x_3, \dots$ вычисляются последовательно: например, для решения уравнения

$$x^2 + px = q$$

Виет ищет неизвестную в форме $x = x_1 + x_2 + x_3$ и переписывает уравнение в виде

$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 + px_1 + px_2 + px_3 = \\ &= x_1^2 + px_1 + (2x_1 + p)x_2 + x_2^2 + [2(x_1 + x_2) + p]x_3 + x_3^2. \end{aligned}$$

Первое приближение x_1 Виет находит, пренебрегая членами x_2 и x_3 ; далее, деля разность $q - x_1^2 - px_1$ на сумму $2x_1 + p$, т. е. пренебрегая членом x_3 и округляя частное, он находит x_2 , а деля разность $q - x_1^2 - px_1 - (2x_1 + p)x_2 + x_2^2$ на сумму $2(x_1 + x_2) + p$ и округляя частное, получает x_3 . Например, при решении уравнения $x^2 + 7x = 60750$ он находит $x_1 = 200$; деля разность $60750 - 41400 = 19350$ на $2x_1 + p = 407$ и округляя, он получает $x_2 = 40$, а деля разность $19350 - (2x_1 + p)x_2 + x_2^2 = 19350 - 17880 = 1470$ на $2(x_1 + x_2) + p = 487$ и округляя, он находит $x_3 = 3$, т. е. $x = 243$. Метод Виета, несмотря на его громоздкость, применялся до самого конца XVII в., когда был вытеснен более простым и удобным методом Ньютона.

Мы остановились с большей подробностью, чем во многих других случаях, на алгебраических трудах и открытиях Виета, потому что они сообщили новое направление алгебре и послужили основой, на которой смогли начать успешное развитие такие ведущие науки последующего периода, как аналитическая геометрия и исчисление бесконечно малых. Прежде чем расстаться с великим французским ученым, мы рассмотрим еще одно замечательное открытие, принадлежащее как раз области инфинитезимальной математики, а именно первое в Европе чисто аналитическое представление числа π , притом в форме бесконечного произведения некоторых квадратных корней. Это открытие изложено в «Восьмой книге ответов на различные математические вопросы» (*Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII, Turonis, 1593*), — остальные книги света не увидели.

Допустим, что в круг радиуса 1 вписан правильный n -угольник площади S_n , и обозначим радиус круга, вписанного в этот n -угольник, r_n . Тогда

$$S_n : S_{2n} = r_n : r = \cos \frac{180^\circ}{n};$$

при этом в случае $n = 4$ площадь $S_n = 2r^2$. Если положить поочередно $n = 4, 8, 16, \dots$ и перемножить возникающие при этом равенства

$$\frac{S_4}{S_8} = \cos \frac{180^\circ}{4}, \quad \frac{S_8}{S_{16}} = \cos \frac{180^\circ}{8} \text{ и т. д.,}$$

то, учитывая, что S_{2n} при $n \rightarrow \infty$ имеет пределом площадь круга, мы получим

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

Сам Виет с его неизменной любовью к греческой науке писал, что привел к вычислению прием Антифона (ср. стр. 88). Разумеется, вопрос о сходимости найденного бесконечного произведения перед Виетом не встал. Доказать это нетрудно.

Отрицательные числа

Одной из важнейших особенностей европейской математики было систематическое пользование отрицательными числами. Впервые отрицательные числа появились в Европе в «Книге абака» Леонардо Пизанского при рассмотрении семи неопределенных уравнений с восемью неизвестными x, y, z, t, u, v, w, s :

$$\begin{aligned}x + y + z + \frac{1}{2}(t + u + v + w) &= s, \\y + z + t + \frac{1}{3}(u + v + w + x) &= s, \\&\dots\dots\dots \\w + x + y + \frac{1}{8}(z + t + u + v) &= s.\end{aligned}$$

Леонардо говорит, что эта задача неразрешима, но становится разрешимой, если принять, что за третьим человеком имеется долг (debitum), тогда решение принимает вид: $x = 507, y = 171, z = \text{долг } 9$ (число, появляющееся при вычитании 4038 из 4029), $t = 1347, u = 451, v = 131, w = 1431, s = 2349$. Аналогичные примеры отрицательных чисел, истолковываемых в виде долга, встречаются еще в нескольких задачах «Книги абака».

Термин «долг» был заимствован Леонардо, по-видимому, у индийцев через арабов (мы упоминали один случай появления отрицательных чисел у Абу-л-Вафы, называвшего их словом «дайн», с тем же значением, см. стр. 218).

Отрицательные числа имеются и в арифметиках Пачоли и Шюке. Более подробно излагает этот вопрос Шюке, который обозначает отрицательные числа выражением вида $0 \text{ и } 11$, называет их числами, «меньшими, чем ничто», и истолковывает их как долг; сопоставляя натуральным числам степени a^n , Шюке сопоставляет отрицательным числам степени $\frac{1}{a^n}$, т. е. по существу, вводит отрицательные показатели.

Однако еще Кардано называет отрицательные корни алгебраических уравнений «фиктивными».

Применение отрицательных чисел позволяет рассматривать вместо трех форм квадратных уравнений

$$x^2 = ax + b, \quad x^2 + ax = b, \quad x^2 + b = ax$$

с положительными корнями единую форму, за которую можно принять любую из них. Такая единая трактовка различных форм квадратных уравнений, которой пользовался еще Брахмагупта (см. стр. 192), в Европе впервые встречается только в «Полной арифметике» М. Штифеля, который записывает все три вида этих уравнений в форме, равносильной современной записи

$$x^2 = ax + b,$$

и описывает решение этого уравнения во всех трех случаях ($a > 0$, $b > 0$; $a > 0$, $b < 0$ и $a < 0$, $b > 0$) следующим образом: «Во-первых, начини с числа неизвестного, раздели его пополам, поставь затем на его место эту половину и оставь ее там, пока ты не покончишь с всем. Во-вторых, возведи эту половину в квадрат. В-третьих, сложи либо вычти в зависимости от знака. В-четвертых, теперь извлеки квадратный корень из полученной тобой после сложения суммы либо полученной после вычитания разности. В-пятых, сложи либо вычти в зависимости от знака или условий твоего примера»¹. На многочисленных примерах это правило применяется следующим образом: берется половина a , причем если a отрицательно, Штифель оперирует с отрицательным числом; эту половину, с одной стороны, сохраняют до последнего действия, а с другой стороны, возводят в квадрат. К этому квадрату прибавляют свободный член b , но поскольку сложение отрицательных чисел для Штифеля было еще новинкой, то формулируется правило отдельно для положительного и отрицательного b . Из полученной суммы извлекается квадратный корень, который складывается с половиной a с ее знаком.

Далее Штифель излагает систематическую теорию отрицательных чисел на примерах

0+6	0-6	0+6	0-6
0+4	0-4	0-4	0+4
0+24	0+24	0-24	0-24

и аналогичное правило знаков для деления на примерах (± 24): (± 6). По поводу отрицательных чисел Штифель говорит: «Ты видишь, конечно, что все это с первого взгляда очень похоже на самый пустой вздор, и, однако же, выполненные сообразно с этим алгебраические действия приводят к изображениям поистине удивительным. Но, чтобы не пропустить ничего из того, что относится к целостной системе арифметики, по мере своих сил я должен, как мне кажется, сказать в этой части о фиктивных числах ниже, чем ничего (*de numeris fictis infra nihil*). Итак, подобно тому, как мы представляем себе различные корни чисел у чисел, не имеющих таких корней, и это представление оказывается в высшей степени полезным к математическим делам, так же не без пользы представляем себе и число ниже 0, т. е. ниже, чем ничего»².

Как мы видим, Штифель подчеркивает аналогию между введенным отрицательных и иррациональных чисел.

Слова Штифеля «ниже, чем ничего» указывают, что он мысленно изображает положительные и отрицательные числа на вертикальной прямой (подобно делениям шкалы термометра). Геометрическое истолкование отрицательных чисел явилось решающим фактором для того, чтобы на них перестали смотреть как на «фиктивные числа». Это истолкование получило затем дальнейшее развитие у Альбера Жирара.

Геометрическое истолкование отрицательных чисел получило широкое распространение после появления аналитической геометрии, где положительные и отрицательные числа стали рассматриваться как координаты точек. Термины «положительный» (еще *affirmativus* — «утверди-

¹ *M. Stifel. Arithmetica integra*, л. 240 об.

² Там же, л. 250.

тельный», а не positivus) и «отрицательный» (negativus и privativus) впервые в Европе появились в рукописи «Initius Algebra». Как мы указывали, по-видимому, эти термины являются переводами арабских терминов «мусбат» и «маффи» самаркандского математика и астронома ал-Кушчи (см. стр. 218).

Тригонометрия

Тригонометрия в Европе появляется в XII в. вместе с переводами астрономических сочинений ученых стран ислама. Арабское название линии синуса «джайб» — транскрипция индийского слова «джива» — «тетива» — было переведено латинским словом *sinus* — буквальный переводом слова «джайб» — впадина, пазуха; в рукописях XII в. наряду со словом *sinus* встречается и слово *geib* — латинская транскрипция слова «джайб». Вскоре появляются также *sinus-versus* — разность между радиусом круга и линией косинуса, *umbra recta* (прямая тень) — название линии котангенса, перевод арабского выражения «плоская тень», *umbra versa* — название линии тангенса, перевод арабского выражения «обращенная тень». Эти термины мы встречаем уже у Бравардина. Наряду с термином «синус» в Европе до XV в. применялся птолемеевский термин «хорда удвоенной дуги».

С тригонометрией были тесно связаны исследования немецкого ученого-гуманиста Николая Кузанского (1401—1464), сына рыбака Кребса из деревни Куза на Мозеле. Николай Кузанский учился в университетах Гейдельберга и Падуи и в 1449 г. стал кардиналом. Наряду с богословием он деятельно занимался математикой, астрономией, механикой, географией, философией и правом, им была предложена реформа календаря и составлена карта Европы. В своих философских сочинениях, в которых пантеистические идеи перемешаны со схоластической мистикой, он уделял много внимания таким математическим вопросам, как проблема бесконечного и спор о прерывном и непрерывном. В 1445—1449 гг. он написал трактаты «О квадратуре круга» (*De quadratura circuli*) и «О соизмерении прямого и кривого» (*De recti ac curvi commensuratione*) — о спрямлении окружности. Вслед за Аристотелем и многими другими Николай Кузанский был убежден в невозможности точной квадратуры круга и искал достаточно точные приближения построения. Основным его результатом для приближенного спрямления дуги окружности в наших обозначениях можно выразить формулой

$$\varphi \approx \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi},$$

дающей хорошее приближение с недостатком: например, для $\varphi = \pi / 4$ она даст 0,7836 вместо 0,7854 с погрешностью около 0,2%.

Первым крупным сочинением по тригонометрии в Европе были «Пять книг о треугольниках всех видов» (*De triangulis omnimodis libri quinque*) немецкого математика и астронома Иоганна Мюллера (1436—1476) из Кёнигсберга (в Нижней Франконии), прозванного по латинскому названию места рождения Региомонтаном. Региомонтан в двенадцатилетнем возрасте поступил в Лейпцигский университет, затем был в Венском университете учеником Пейрбаха, а с 1458 г. сам стал читать там лекции. Путешествуя по Италии, он изучил греческий язык.



Региомонтан
Портрет неизвестного художника (1726)

Последние годы жизни Региомонтан работал при дворе венгерского короля Матвея Корвина и возглавлял астрономическую обсерваторию в Нюрнберге. Региомонтан умер в Риме, куда приехал для выработки календарной реформы.

Сочинение о треугольниках было написано Региомонтаном в Италии в 1462—1464 гг. В нем излагались задачи на построение треугольников, причем некоторые из них решены алгебраически, а не построением, далее тригонометрия на плоскости и на сфере. Это был первый труд в Европе, в котором тригонометрия рассматривалась в широком объеме как самостоятельная математическая дисциплина. Основное содержание тригонометрии Региомонтана взято из арабской литературы, но Региомонтану принадлежит заслуга систематизации и превосходного изложения огромного материала, который он дополнил собственными частными результатами и во многих случаях оригинальными доказательствами. |

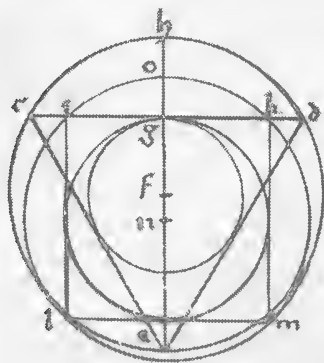
В частности, Региомонтан доказывает сферическую теорему косинусов, формулируемую им следующим образом: «Во всяком сферическом треугольнике, состоящем из дуг больших кругов, отношение обращенного синуса какого-нибудь угла и разности двух обращенных синусов, из которых один — от стороны, стягиваемой этим углом, а другой — от разности обеих дуг, заключающих этот угол, равно отношению квадрата полного прямого синуса к прямоугольнику, образованному синусами дуг, заключающих рассматриваемый угол»¹. Если мы обозначим синус дуги x через $\sin x$, «полный синус», т. е. радиус круга, через $\sin \text{tot}$, а обращен-

¹ *Regiomontanus. On triangles*, ed. and transl. B. Hughes. Madison—Milwaukee—London, 1967, p. 270—271.

DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
maticarum disciplinarum eximij professoris
IOANNIS DE RE-
GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-
MODIS LIBRI QVINQVE:

Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad
scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni-
re: quæ cum nusquā alibi hoc tempore expositæ
habeantur, frustra sine harum instructione
ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce plerq; D. Nicolai Cusani de Qua-
dratura circuli, Decq; recti ac curui commensuratione:
itemq; Io. de monte Regio eadem de re *ελεγκ-
τα*, hæctenus à nemine publicata.



Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia
singulari. Norimbergæ in ædibus Io. Petrei,

ANNO CHRISTI
M. D. XXXIII.

ный синус дуги x через $\sin \text{vers } x$, то можно переписать утверждение этой теоремы в виде
$$\frac{\sin \text{vers } A}{\sin \text{vers } a - \sin \text{vers } (b - a)} = \frac{(\sin \text{tot})^2}{\sin b \cdot \sin c}, \quad \text{т. е., полагая}$$
 $\sin \text{tot} = 1, \sin \text{vers } x = 1 - \cos x$, получим
$$\frac{1 - \cos A}{\cos (b - c) - \cos a} = \frac{1}{\sin b \cdot \sin c},$$
 что можно переписать в виде теоремы косинусов

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

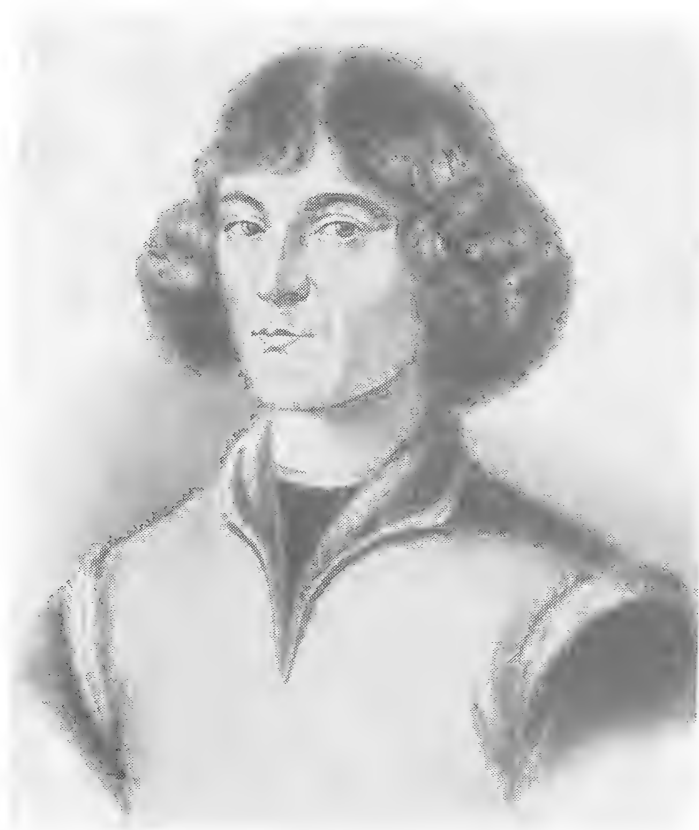
Формулировка Региомонтана представляет собой обобщение правила Ибн Корры для определения высоты Солнца по широте местности, склонению Солнца и часовому углу (см. стр. 235), известного Региомонтану по «Книге о науке звезд» ал-Баттани. Региомонтан вычислил таблицы синусов и тангенсов, в которых радиус круга полагался равным 10^7 , что равносильно вычислению этих таблиц в десятичных дробях с семью десятичными знаками.

На развитие тригонометрии существенное влияние оказал великий польский астроном Николай Коперник (1473—1543), уроженец Торуня. Коперник изучал математику и медицину в Кракове, в то время столице Польши, и в Болонье, затем стал священником соборной церкви в Фромборке (Фрауэнбурге). Основной труд Коперника, содержащий изложение его гелиоцентрической системы «О вращении небесных сфер» (*De revolutionibus orbium coelestium*), был напечатан в Нюрнберге почти одновременно со смертью его автора. От астрономов, принявших точку зрения Коперника, требовались более точные астрономические наблюдения и более тщательная их математическая обработка, что вызвало необходимость создания более точных тригонометрических таблиц и дальнейшего совершенствования техники тригонометрических вычислений. В XIII главе второй книги труда Коперника содержится краткое изложение плоской тригонометрии, а в XIV главе той же книги — изложение сферической тригонометрии. Коперник вычислил также более точные таблицы синусов, включенные в «Таблицы науки о треугольниках» (*Canon doctrinae triangulorum*), изданные в 1551 г. Георгом Иахимом Ретиком (1514—1576).

В книге «О вращении небесных сфер» Коперник дал оригинальный вывод теорем сферической тригонометрии, основанный на рассмотрении трехгранного угла, проектирующего сферический треугольник из центра сферы. Терминология Коперника похожа не на терминологию Региомонтана и ученых стран ислама, а на терминологию Птолемея. Так, например, он доказывает теорему синусов для прямоугольного сферического треугольника в следующей формулировке: «В сферических треугольниках, имеющих прямой угол, хорда, стягивающая удвоенную дугу, лежащую против прямого угла, к хорде, стягивающей удвоенную сторону, одну из прилежащих к прямому углу, относится как диаметр сферы к хорде, стягивающей на большом круге сферы угол, вдвое больший угла, заключенного между последней и первой сторонами сферического треугольника»¹.

Термин «тень» был заменен на «тангенс» (от латинского слова *tangens* — «касающийся») в XVI в. в «Геометрии круглого» (*Geometria rotundi*, 1583) датского математика Томаса Финке (1561—1656). Финке же был введен термин «секанс» (от латинского слова *secans* — «секущий»).

¹ Николай Коперник. О вращении небесных сфер. Перевод И. Н. Веселовского. М., 1964, стр. 61.



Николай Коперник

Теория перспективы

Перспективное изображение пространственных фигур, т. е. центральное проектирование этих фигур на плоскость, применялось еще древними греками в «скенографии» — искусстве писать сценические декорации. Различные виды центральных проекций рассматривались в «Оптике» Евклида и в «Планисферии» Птолемея.

Теории перспективы была посвящена в значительной части упоминавшаяся выше «Оптика» польского ученого XIII в. Витело, который изложил основные результаты теории перспективы, имевшиеся в «Оптике» Евклида, «Оптике» Птолемея и в «Книге оптики» Ибн ал-Хайсама, известной ему по переводу Герардо Кремонского. Впоследствии сочинение Витело было издано Ф. Ризнером вместе с указанным переводом Герардо в Базеле в 1572 г. «Оптика» Витело оказала значительное влияние на дальнейшее развитие науки, в частности сыграла важную роль в развитии геометрии. Сочинение Кеплера «Оптическая часть астрономии» (*Astronomia pars optica*) носит подзаголовок «Дополнение к Витело» (*Ad Vitellionem paralipomena*).

К XV в. относится деятельность архитектора Леон-Баттисты Альберти (1404—1472) из Флоренции и художника Пьетро деи Франчески или Пьеро делла Франческа (1416—1492) из Борго Сан Сеполькро, работавших в Риме при дворе папы Николая V.

Альберти в своем трактате «О живописи» (*Della pittura*, 1435) разработал метод построения изображения расположенных друг за другом рав-

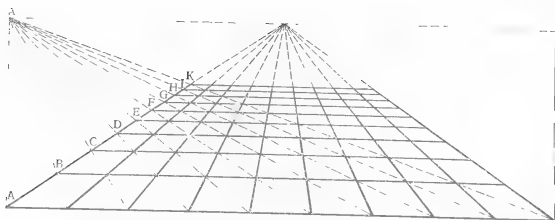


Рис. 76. Иллюстрация из книги Л. Б. Альберти «О живописи»
(*L. B. Alberti. Della pittura. Napoli, 1703, p. 17*)

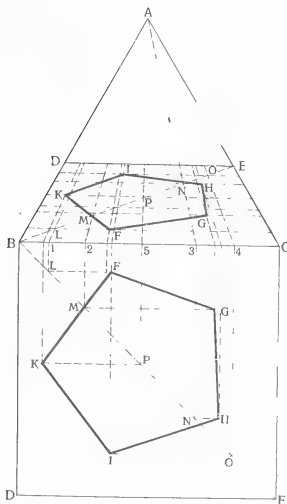


Рис. 77. Иллюстрация из книги П. деи Франчески «О перспективе в живописи»
(*P. dei Franceschi. De prospettiva pingendi. Strassburg, 1899*)

ных и параллельных отрезков в виде параллельных отрезков, заключенных между двумя линиями, пересекающимися на линии горизонта. Метод Альберти ясен из его чертежа (рис. 76).

Историк искусства Джорджо Вазари пишет об Альберти: «В 1457 г., когда немцем Иоганном Гуттенбергом был изобретен полезнейший способ печатания книг, Леон-Баттиста по сходству избрал прибор, при помощи которого можно было строить перспективы с натуры и уменьшать фигуры, а также избрал способ, позволивший переводить вещи в большой масштаб и их увеличивать; все это хитроумные, полезные для искусства и поистине прекрасные изобретения»¹.

Деи Франчески в трактате «О перспективе в живописи» (*De prospectiva pingendi*, ок. 1480) описал построение перспективного изображения предмета по его вертикальной и горизонтальной проекциям.

Приведем построение деи Франчески перспективного изображения правильного пятиугольника (рис. 77).

Леонардо да Винчи

Вопросы теории перспективы рассматривались также в сочинениях великого итальянского художника Леонардо да Винчи (1452—1513), широко пользовавшегося перспективой в своей живописи.

Леонардо да Винчи, занимаясь экспериментальными науками, механикой, оптикой, астрономией, видел в математике образец научной доказательности, а механику называл «раем математических наук». В своем «Трактате о живописи» (*Il trattato della pittura*, опублик. 1651) он рекомендовал художникам изучать науки, в том числе излагаемую здесь геометрическую перспективу. Он указывал, что «влюбленные в практику без науки — словно кормчий, вступающий на корабль без руля или компаса; он никогда не уверен, куда плывет»². Но и наука без практики похожа на «стоячую воду, которая либо гниет, либо замерзает на холоде, а ум человека, не находя себе применения, чахнет»³.

Жизнь, полная скитаний, не дала Леонардо да Винчи возможности разработать свои научные идеи и изложить их в виде законченных сочинений. Однако сохранились его записные книжки, содержащие отрывочные заметки и наброски, в большинстве не законченные. В них математическая тематика представлена упражнениями и задачами, так или иначе имеющими прикладное назначение, равно как и некоторыми философскими проблемами, связанными с математическими понятиями. Много внимания уделено нахождению равновеликих площадей и объемов, звездчатым многоугольникам, построению правильных многоугольников на данной стороне либо вписанных в данную окружность, причем часто при условии постоянного раствора циркуля, — вопросу, которым занимался еще Абу-л-Вафа (см. стр. 230). Некоторые решения были приближенными (например, построение семи- и девятиугольника), а некоторые сам Леонардо признал впоследствии ошибочными. В тетрадях содержатся также исследования луночек, замечания о различии кривых простой и двойной кривизны, о невозможности квадратуры круга, о введении знаков + и —. Приближенную квадратуру Леонардо предлагает осуществить при помощи колеса,

¹ Джорджо Вазари. Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих, т. II. Перевод А. И. Венедиктова и А. Г. Габричевского. М., 1963, стр. 279.

² В. П. Зубов. Леонардо да Винчи. М.—Л., 1962, стр. 129.

³ Там же, стр. 259.

ширина которого равна половине его радиуса. Если катить его по плоскости, то при полном повороте его прямоугольный след будет иметь площадь, равную площади его основания ($\pi r^2 = 2\pi r \frac{r}{2}$). Замечательно, что, исследуя центры тяжести фигур и тел, например полукруга и тетраэдра, а также определяя площадь эллипса, Леонардо применил методы Архимеда, предвосхитив ученых XVII в. Им были изобретены математические приборы — циркуль для пропорционального увеличения или уменьшения фигуры, прибор для вычерчивания параболы и др.

Хотя Леонардо теоретически высказался против неделимых («То, что делимо актуально, делимо и потенциально, однако не все величины, делимые потенциально, будут делимы актуально», «Точка не есть часть линии» и др.), практически он применял метод неделимых, придавая ему, по видимому, эвристическое значение. Так, при исследовании истечения воды из сосуда он заменил воду просом, сделав при этом следующее замечание: «И если ты скажешь, что этот опыт нехорош, поскольку вода сама по себе — величина единая и непрерывная, а просо — дискретная и прерывная, на это я тебе отвечу: я хочу позволить себе такую вольность, общую с математиками, а именно: подобно тому, как они делят время на градусы, превращая его из величины непрерывной в прерывную, так и я сделаю то же, приравнивая просо или песок к воде»¹.

Альбрехт Дюрер

Много внимания теории перспективы уделял великий художник того времени — немец Альбрехт Дюрер (1471—1528). Дюрер написал специально для художников «Наставление об измерении с помощью циркуля и линейки» (*Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit*), изданное по-немецки в Нюрнберге в 1525 г. и по-латыни в Париже в 1532 г.

В своем трактате «О человеческой пропорции» (*Von menschlicher Proportion*, 1528), изданном вскоре по-латыни под названием «О симметрии частей человеческих тел» (*De symmetria partium humanorum corporum*, 1532), а затем и во французском и итальянском переводах, Дюрер рассматривает проекции различных частей человеческого тела на три взаимно перпендикулярные плоскости спереди, сбоку и сверху, а также на вертикальные плоскости, составляющие с первыми двумя плоскостями острые углы (рис. 78). В этом же сочинении приводится огромный статистический материал, содержащий измерения различных частей тел мужчин и женщин различных комплекций.

Заметим, что Дюрер занимался также составлением магических квадратов и, в частности, составил первый в Европе магический квадрат

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

изображенный на его гравюре «Меланхолия».

¹ Леонардо да Винчи. Избранные естественнонаучные произведения. Редакция, перевод, статья и комментарии В. П. Зубова. М., 1955, стр. 383.

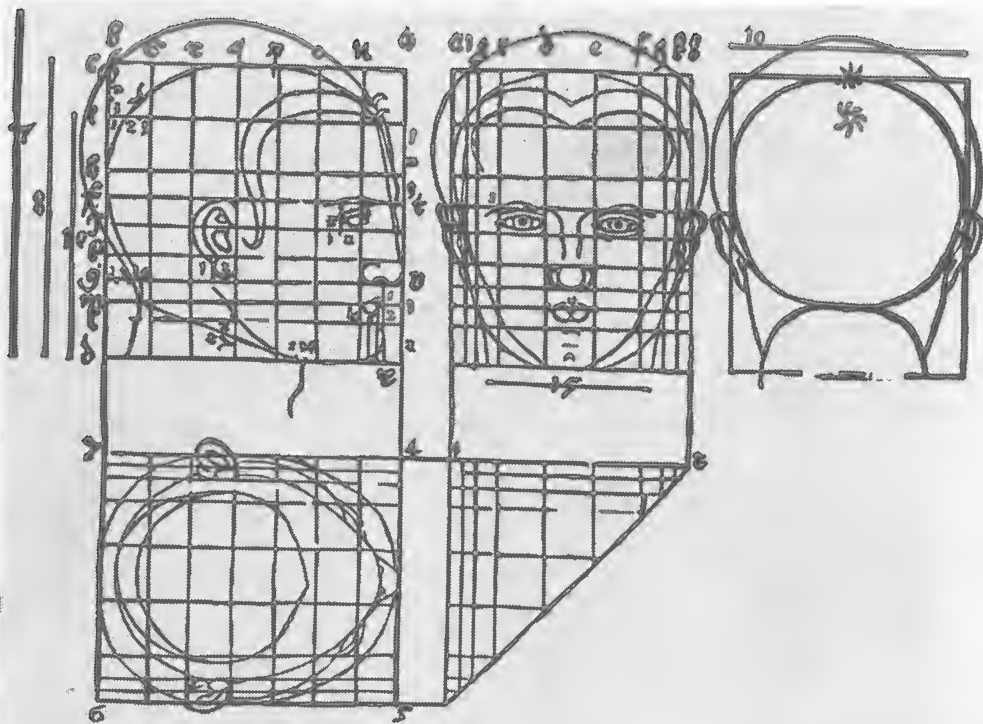


Рис. 78. Иллюстрация из книги А. Дюрера «О человеческой [пропорции]» (A. Dürer. Vier Bücher von menschlicher Proportion. Arnheim, 1603., f. Eii об.).

Теория параллельных линий

Первые известные нам доказательства V постулата Евклида в Европе предложили живший в Провансе (Франция) Лев Герсонид или Леви бен Гершон (1288—1344) и малоизвестный нам Альфонсо (XV в.). Оба они писали на древнееврейском языке, на который были переведены многие арабские математические трактаты. Их доказательства, как и попытки многих ученых стран ислама, были основаны на доказательстве существования прямоугольника, у Герсонида — с помощью рассмотрения четырехугольника с четырьмя равными углами, у Альфонсо — с помощью того же равнобедренного четырехугольника с двумя прямыми углами, что и у Хайяма. В доказательстве Альфонсо упоминается ан-Найризи и используется движение перпендикуляра к прямой, как у Ибн Корры и Ибн ал-Хайсама.

К XVI в. относится также доказательство V постулата Христофора Клавия (настоящая фамилия Шлюссель¹, 1537—1612), ученого-иезуита — уроженца Бамберга, многие годы преподававшего математику в Риме и там же принимавшего участие в реформе календаря при папе Григории XIII. Доказательство Клавия приводится в его комментариях к Евклиду (1596) и основывается на теореме о том, что линия, каждая точка которой отстоит от прямой линии, находящейся в той же плоскости, на равном расстоянии, является прямой. Он доказывает это, исходя из евклидова определения прямой линии как линии, «равно расположенной по отношению ко всем точкам на ней». Клавий считает, что, так как все

¹ Schlüssel по-немецки и clavis по-латыни означают «ключ».

точки рассматриваемой им линии отстоят от прямой на равном расстоянии, эта линия «равно расположена» по отношению к точкам на ней. Он опровергает предположение, что эта линия является окружностью, так как линия, равноотстоящая от окружности, является окружностью, и если бы рассматриваемая линия была окружностью, окружностью должна была быть и данная линия. Исходное положение Клавия близко к исходному положению Ибн ал-Хайсама; Клавий не упоминает имени Ибн ал-Хайсама, но говорит: «Я узнал, что это также сделано в каком-то арабском Евклиде; но мне никогда не представлялось возможности прочесть это доказательство, хотя я упорно несколько раз просил это у того, кто владеет этим арабским Евклидом»¹; по-видимому, Клавий был знаком с доказательством Ибн ал-Хайсама из вторых рук.

Близки к Ибн ал-Хайсаму и следующие предложения Клавия: «Если прямая линия движется по другой прямой, образуя своим концом с ней все время прямой угол, ее другой конец описывает прямую линию»; «Если к прямой линии восставлены два равных перпендикуляра, конечные точки которых соединены прямой линией, то перпендикуляр, опущенный из произвольной точки этой прямой на первую прямую, равен первому перпендикуляру»². Далее Клавий рассматривает тот же четырехугольник, что и Хайям, и доказывает, что его верхние углы прямые. Доказав существование прямоугольника, Клавий доказывает V постулат сначала для случая перпендикуляра и наклонной, а затем для общего случая.

Значение математики эпохи Возрождения

В эту эпоху математика Европы впервые вышла за пределы знаний, полученных в наследство от древних греков и народов Востока. Именно в это время закончилась решительной победой многовековая борьба за введение позиционной десятичной арифметики. В это время была создана арифметическая и алгебраическая символика, отсутствие которой тормозило прогресс теории уравнений ранее. Введены были дробные и отрицательные показатели и отрицательные числа; успешно решена проблема решения в радикалах уравнений третьей и четвертой степеней — проблема, перед которой остановились ученые стран ислама. В связи с решением этой проблемы были формально введены мнимые числа. Виет построил алгебру как символическое исчисление, введя специальные буквенные обозначения для неизвестных и для коэффициентов многочленов, а также расширив символику алгебраических операций. В арифметике были введены десятичные дроби, удобства которых быстро оценили ученые. Значительны были достижения плоской и сферической тригонометрии, были усовершенствованы методы вычисления таблиц. Математика во все большей мере становилась мощным средством решения быстро расширявшегося круга задач не только торговли и землемерия, но и новой техники и нового естествознания. Лучшие умы справедливо начали видеть в математике основной, наряду с экспериментом, метод изучения природы. Долгий период изучения постоянных величин подходил к завершению. Были созданы условия для возникновения теории переменных величин, символической алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления.

¹ Ch. Clavius. Euclidis Elementorum libri XV. Francofurti, 1615, p. 50.

² Там же, p. 51—52.

БИБЛИОГРАФИЯ

Сокращенные названия многотомных и периодических изданий

- БСЭ — Большая советская энциклопедия, 2-е изд. Т. 1—50. М., 1949—1958.
ИМИ — Историко-математические исследования. Под редакцией Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича. М., с 1948 г.
ВНЕТ — Вопросы истории естествознания и техники. М., с 1956 г.
ИИСВ, ФМСВ — Из истории науки и техники в странах Востока. Физико-математические науки в странах Востока. Под редакцией А. Т. Григорьяна и А. П. Юшкевича. Вып. 1—3. М., 1960—1963; вып. 1(4) — 2(5). М., 1966—1969.
Труды ИИЕ — Труды Института истории естествознания АН СССР. М., 1947—1952
Труды ИИЕТ — Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. М., 1954—1961.
ИМЗ — Историко-математический збірник. Под ред. И. З. Штокало. Киев, с 1959 г.
AGMW — Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, herausg. M. Cantor, Bd. 1—30. Leipzig, 1877—1906.
AHES — Archive for history of exact sciences. Ed. C. Truesdell, Berlin — Heidelberg — New York, since 1961.
AIHS — Archives internationales d'histoire des sciences, fond. A. Mieli. Paris, dès 1947.
BM (1), (2), (3) — Bibliotheca mathematica, herausg. G. Eneström, 1. Folge, Stockholm, 1884—1886 2. Folge Stockholm — Berlin — Paris, 1887—1899, 3. Folge, Leipzig, 1900—1916.
QS (A), (B) — Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, herausg. von O. Neugebauer und O. Toeplitz, Abt. A (Quellen), Bd 1—4. Berlin, 1930—1937; Abt. B (Studien), Bd 1—4, Berlin, 1931—1937.
SBPMS — Sitzungsberichte der Physikalisch — Medizinischen Sozietät in Erlangen herausg. E. Wiedemann, Bd. 34 — 60, Erlangen, 1902 — 1928.

Литература ко всем трем томам

1. Общие сочинения

- Александров А. Д. Общий взгляд на математику. В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. 1. М., 1956, стр. 5—78.
Боев Г. П. Лекции по истории математики. Саратов, 1956.
Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Перевод И. Г. Башмаковой под редакцией К. А. Рыбникова. М., 1963.

- Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам (арифметика и алгебра, геометрия и тригонометрия, аналитическая и синтетическая геометрия, исчисление бесконечно малых). Перевод И. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича. 2-е изд. М.—Л., 1935.
- Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М.—Л., 1946.
- История Академии наук СССР, т. 1 (1724—1803). М.—Л., 1958. (Математические главы написаны А. П. Юшкевичем).
- История естествознания в России, т. 1, вып. 1—2. М.—Л., 1957. (Математические главы написаны А. П. Юшкевичем).
- История отечественной математики (отв. ред. И. З. Штокало), т. 1—2. Киев, 1966—1967.
- Колмогоров А. Н. Математика. БСЭ, 2-е изд., 1954, т. 26, стр. 464—483.
- Каджори Ф. История элементарной математики с указанием на методы преподавания. Перевод под редакцией с примечаниями и добавлениями И. Ю. Тимченко. 2-е изд., Одесса, 1917.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики. Изв. Северо-Кавказского гос. ун-та, 1928, т. 3(15), 35—129.
- Рибников К. А. История математики, т. 1—2. М., 1960—1963.
- Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. Перевод Н. Б. Погребыского. 2-е изд., М., 1969.
- Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. Под редакцией А. П. Юшкевича. М., 1940.
- Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. М., 1968.
- Archibald R. C. Outline of the history of mathematics, 6th ed. Oberlin (Ohio), 1949.
- Becker O. Grundlagen der Mathematik in geschichtlichen Entwicklung. Freiburg — München, 1954.
- Becker O., Hofmann J. E. Geschichte der Mathematik. Bonn, 1951.
- Bell E. T. The development of mathematics, 2nd ed. N. Y.—London, 1945.
- Bell E. T. Men of mathematics. N. Y., 1937. Краткие биографии Евдокса, Архимеда, Декарта, Ферма, Паскаля, Ньютона, Лейбница, членов рода Бернулли, Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Монжа, Фурье и ряда математиков XIX — XX вв.
- Bortolotti E. Storia della matematica elementare. Enciclopedia delle matematiche elementare e complementi, v. 32. Milano, 1950.
- Boyer C. B. A history of mathematics, 1968.
- Brunschvicg L. Les étapes de la philosophie mathématique. 3^{ème} éd. Paris, 1929.
- Cajori F. A history of mathematics. N.—Y., 1929.
- Cajori F. A history of mathematical notations, v. 1—2. N. Y., 1928—1930.
- Cantor M. Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd 1—4, 3. Aufl. Leipzig, 1907—1913. Поправки: BM (3), Kleine Bemerkungen zur letzten Ausgabe von Cantors Vorlesungen; Bd 1, 4. Aufl. Leipzig, 1922.
- Coolidge J. L. The mathematics of great amateurs, 2nd ed. N. Y., 1963.
- Debrun P., Iard J. Mathématiques et mathématiciens. Paris, 1959. Содержит многочисленные отрывки из классиков математики.
- Histoire générale des sciences, sous la direction de R. Taton, v. 1—3. Paris, 1957—1961. 2^{de} éd., v. 1. Paris, 1966.
- Hofmann J. E. Geschichte der Mathematik, Bd. 1—3. Berlin, 1953—1957; Bd 1. 2. Aufl. Berlin, 1963.
- Loria G. Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX. 2^a ed. Milano, 1950.
- Montucla J. E. Histoire des mathématiques, nouv. éd. augmentée par J. Lalande, v. 1—4. Paris, 1799—1802 (в основном очень устарела, но содержит ряд интересных сведений, в других сочинениях не встречающихся).
- Smith D. E. History of mathematics, 4th ed. N. Y., 1958.
- Smith D. E. A source book in mathematics, v. 1—2. N. Y., 1959.
- Tannery P. Mémoires scientifiques, v. 1—17. Toulouse — Paris, 1912—1950.
- Tropfke J. Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung, Bd. 1—7, 2. Aufl. Berlin — Leipzig, 1921—1934; Bd 1—4, 3. Aufl. Berlin, 1930—1940.

2. Справочно-библиографическая литература

- Бобынин В. В. Русская физико-математическая библиография, т. 1—3. М., 1886—1897.
- Динзе О. В., Шафрановский К. И. Математика в изданиях Академии наук СССР, 1728—1935. М., 1936.
- История естествознания. Литература, опубликованная в СССР. I (1917—1947). М.—Л., 1949; II (1948—1950). М., 1955; III (1951—1956). М., 1963.
- Лукомская А. М. Библиографические источники по математике, изданные в СССР. I (1917—1952). М.—Л., 1957; II (1953—1960). М.—Л., 1963.
- Лукомская А. М. Основные иностранные библиографические источники по математике и механике (1931—1957). М.—Л., 1960.
- Dictionary of scientific biography, editor in chief Ch. C. Gillispie, v. 1—2. New York, 1970 (издание рассчитано приблизительно на 12 томов).
- Encyclopédie des sciences mathématiques, v. 1—6. Paris — Leipzig, 1904—1915.
- Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd 1—6. Leipzig, 1898—1934: 2. Aufl., 1952—1968.
- Loria G. Guido allo studio della storia delle matematiche. 2. ed. Milano, 1946.
- Poggendorff J. C. Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften, Bd 1—2. Leipzig, 1863.
- Sarton G. Introduction to the history of science, v. 1—3. Baltimore, 1927—1947. (Содержит подробные библиографические сведения обо всех известных естествоиспытателях и математиках до середины XIV в.).
- О работах советских ученых по истории математики смотри в сборниках: Математика в СССР за сорок лет, т. I—II. М., 1959; Математика в СССР, 1958—1967, т. II. Библиография, М., 1969—1970; История отечественной математики (отв. ред. И. Э. Штокало), т. IV, книга вторая. Киев, 1970.

3. Сочинения по истории отдельных математических наук

- Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Происхождение систем счисления. Энциклопедия элементарной математики, т. I. М.—Л., 1951, стр. 11—74.
- Беллюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. Под редакцией А. П. Юшкевича. М., 1940.
- Бонiola P. Неевклидова геометрия. Критико-историческое исследование ее развития. Перевод А. Кулишера. СПб., 1910.
- Васильев А. В. Целое число. Исторический очерк. Пг., 1922.
- Гуссов В. В. Работы русских ученых по теории гамма-функций.— ИМИ, 1953, т. V, 421—472.
- Гуссов В. В. Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР.— ИМИ, 1954, т. VI, 355—475.
- Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. 2-е изд. М., 1965.
- Каган В. Ф. Основания геометрии. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии. Одесса, 1907.
- Каган В. Ф. Основания геометрии, ч. I—II. М.—Л., 1949—1956.
- Кутлумуратов Дж. О развитии комбинаторных методов математики. Нукус, 1964.
- Лихин В. В. Теория функций и чисел Бернулли и ее развитие в трудах отечественных математиков.— ИМИ, 1959, т. XII, 50—134.
- Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. М., 1967.
- Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. М.—Л., 1951.
- Стяжкин Н. И. Становление идей математической логики. М., 1964.
- Тимченко И. Ю. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций, т. I. Одесса, 1899.
- Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. М., 1883.
- Boyer C. B. History of analytic geometry. N. Y., 1956.
- Boyer C. B. The history of the calculus and its conceptual development, 3rd ed. N. Y., 1959.
- Braunmühl A. Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie, Bd 1—2. Leipzig, 1900—1903.
- Brill A., Noether M. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresber. Dtsch. Math. Vereins, Bd 3, 1894.

- Coolidge J. L. A history of geometrical methods. Oxford, 1940.
 Coolidge J. L. A history of the conic sections and quadric surfaces. Oxford, 1945.
 Dickson L. B. History of the theory of numbers, v. 1—3, 2nd. ed. Washington, 1934.
 Engel F., Stäckel P. Die Theorie der Parallelinen von Euklid bis auf Gauss. Leipzig, 1895.
 Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bd 1—2. Leipzig, 1909.
 Loria G. Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Storia e bibliografia, 4^a ed. Padova, 1931.
 Loria G. Curve piani speciali algebriche e trascendenti, v. 1—2, 3^a ed. Milano, 1930; Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte, Bd 1—2, 2. Aufl. Leipzig, 1911.
 Loria G. Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti, v. 1—2. Bologna, 1921.
 Loria G. Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri. Milano, 1924.
 Matthiessen L. Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen, 2 Aufl. Leipzig, 1896.
 Menninger K. Zahlwort und Ziffer, eine Kulturgeschichte der Zahl, Teil 1—2, 2 Aufl. Göttingen, 1958.
 Muir Th. The theory of determinants in the historical order of development, v. 1—4 and supplement. London, 1906—1930.
 Poudra V. G. Histoire de la perspective ancienne et moderne. Paris, 1864.
 Reiff R. Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, 1889.

Ahrens W. Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. Leipzig, 1904. (Мысли и изречения выдающихся математиков, отдельные факты их биографий и т. п.).

Литература к I части I тома

1. Общие сочинения

- Van der Varde B. J. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. Перевод И. Н. Веселовского. М., 1959.
 Выгодский М. Я. Алгебра и арифметика в древнем мире, 2-е изд. М., 1967.
 Кольман Э. История математики в древности. М., 1961.
 Нейгебауэр О. Точные науки в древности. Перевод Е. В. Гохман. Редакция и предисловие А. П. Юшкевича. М., 1968.
 Раик А. Е. Очерки по истории математики в древности. Саранск, 1967.
 Фаццари Г. Краткая история математики с древнейших времен кончая средними веками. Перевод С. А. Галашина. М., 1923.
 Цейтлин Г. Г. История математики в древности и в Средние века. Перевод И. С. Юшкевича. Предисловие М. Я. Выгодского, 2-е изд. М.—Л., 1938.
 Aaboe A. Episodes from the early history of mathematics. N. Y.—Toronto, 1964.
 Hankel H. Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, 1874.
 Wussing H. Mathematik in der Antike. Leipzig, 1965.

2. Литература к I главе

- Levy-Bruhl L. Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures. Paris, 1910.
 Levy-Bruhl L. La mentalité primitive. Paris, 1925.

3. Литература ко II главе

а) Первоисточники

- Eisenlohr A. Ein mathematischer Papyrus der alten Aegypter. Leipzig, 1877.
 Glanville S. R. K. The mathematical leather roll in the British Museum.— Journal of Egyptian Archeology, 1927, v. 13, 232—239.
 Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau, herausg. und komm. von W. W. Struve unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von B. A. Turajeff.— QS (A), Bd I, 1930.

- The Rhind mathematical papyrus. Ed. T. E. Peet. London, 1923.
The Rhind mathematical papyrus, v. 1—2. Ed A. B. Chace, L. Bull, H. P. Manning, R. C. Archibald. Oberlin (Ohio), 1927—1929.

6) Исследования

- Бобынин В. В. Математика древних египтян. М., 1882.
Боев Г. П. Вычисление поверхностей и объемов тел вращения у древних египтян.— Вестник древней истории, 1950, № 3, 196—201.
Веселовский И. Н. Египетская наука и Греция.— Труды ИИЕ, 1948, вып. 2, 426—498.
Лурье С. Я. К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию.— Архив истории науки и техники, 1933, вып. 1, 45—70.
Раук А. Е. Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов.— ИМИ, 1958, т. XI, 171—182.
Раук А. Е. Две лекции о египетской и вавилонской математике.— ИМИ, 1959, т. XII, 271—318.
Яновская С. А. К теории египетских дробей.— Труды ИИЕТ, т. 1, 1947, 269—282.
Neugebauer O. Arithmetik und Rechenachnik der Ägypter. Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte.— QS (B), Bd 1, 1931, 301—380, 413—451.
Vogel K. Vorgriechische Mathematik, I. Vorgeschichte und Ägypten. Hannover-Padenborn, 1959.

4. Литература к III главе

а) Первоисточники

- Bruins E. M., Rutten M. Textes mathématiques de Suse. Paris, 1961.
Neugebauer O. Mathematische Keilschrifttexte.— QS (A), Bd 3, 1935—1937.
Neugebauer O., Sachs A. Mathematical cuneiform texts, v. 1—3. New Haven, 1945.
Thureau-Dangin F. Textes mathématiques Babyloviens. Leiden, 1938.

б) Исследования

- Вайман А. А. Вавилонские числа.— ИМИ, 1957, т. X, 587—594.
Вайман А. А. Вавилонские геометрические рисунки пространственных фигур.— ИМИ, 1960, т. XIII, 379—382.
Вайман А. А. Шумеро-вавилонская математика. III—I тысячелетия до н. э. М., 1961.
Веселовский И. Н. Вавилонская математика.— Труды ИИЕТ, 1955, т. 5, 241—303.
Выгодский М. Я. Происхождение знака нуля в вавилонской нумерации.— ИМИ, 1959, т. XII, 393—421.
Bruins E. M. Fermat problems in Babylonian mathematics. Janus, 1966, v. LIII, 3, 194—211.
Bruins E. M. Interpretation of cuneiform mathematics. Physis, 1962, v. IV, 277—341.
Bruins E. M. Nouvelles découvertes sur les mathématiques babyloniennes. Paris, 1957.
Bruins E. M. Reciprocals and pythagorean triads. Physis, 1967, v. IX, 373—392.
Neugebauer O. Zur Geschichte der babylonischen Mathematik. Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung.— QS (B), Bd 1, 1931, 67—80, 120—130, 183—200, 452—463; Bd 2, 1933, 199—214.
Vogel K. Vorgriechische Mathematik. II. Die Mathematik der Babylonier. Hannover-Padenborn, 1959.

5. Литература к IV—V главам

а) Первоисточники

- Аполлоний Переский. Конические сечения с комментариями Евтокия. Перевод И. Ягодинского. Изв. Северо-Кавказского гос. ун-та, т. 3 (15). Ростов-на-Дону, 1928, стр. 130—152. (Первые 20 предложений I книги).
Аристотель. Метафизика. Перевод и примечания А. В. Кубицкого. М.—Л., 1934.
Аристотель. Физика. Перевод В. П. Карпова. М., 1937.
Аристотель. Аналитики первая и вторая. Перевод Б. А. Фохта. М., 1952.
Архимед. Сочинения. Перевод, статья и комментарии И. Н. Веселовского, М., 1962.
Евклид. Начала. Перевод и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского, т. 1—3. М.—Л., 1948—1950.

- Маковельский А. О. Досократики. Казань, 1915.
- Платон. Сочинения, в трех томах под общей редакцией А. Ф. Лосева и В. Ф. Асмуса. т. 1—2. М., 1968—1970.
- Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquiis. Ed. J. L. Heiberg, v. 1—2. Lipsiae, 1891.
- Apollonios von Perga. Konika. Übers. von A. Czwalina. München-Berlin, 1926.
- Apollonius de Perga. Les coniques. Trad. P. Ver Eecke. Bruges., 1923.
- Apollonius of Perga. Treatise on conic sections. Transl. by T. L. Heath. Cambridge, 1896; reprint, N. Y., 1961.
- Archimedis Opera omnia. Ed. J. L. Heiberg, v. 1—3, 2^a ed. Lipsiae. 1913—1915.
- Diophanti Alexandrini Opera omnia, v. 1—2. Ed. P. Tannery. Lipsiae, 1893—1895.
- Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et la livre de nombres polygones. Trad. P. Ver Eecke. Bruges, 1926.
- Diophantos von Alexandria. Die Arithmetik. Übers. und erklärt von A. Czwalina. Göttingen, 1952.
- Euclidis Opera omnia, v. 1—8. Ed. J. L. Heiberg et H. Menge. Lipsiae, 1883—1916.
- Euclide. Oeuvres traduites littéralement par F. Peyrard. Nouveau tirage augmenté d'une importante introduction par J. Itard. Paris, 1966.
- Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, v. 1—5. Eds J. L. Heiberg, L. Nix, W. Schmidt, H. Schöne. Lipsiae, 1899—1914.
- [Menelaos]. Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abu Nasr Mansur b. 'Ali b. 'Iraq mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematikern. Übers. M. Krause. Berlin, 1936.
- Nicomachus of Gerasa. Introduction to Arithmetic. Transl. M. L. D'Ooge, Ann Arbor, 1938.
- Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt, v. 1—3. 1 ed. F. Hultsch. Berolini, 1876—1879.
- Pappus d'Alexandrie. La Collection mathématique. Trad. P. Ver Eecke. 2^{de} éd. Paris, 1959.
- Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii. ed. G. Friedlein. Lipsiae, 1873.
- Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre des Elements d'Euclide. Trad. P. Ver Eecke. Bruges, 1948.
- Proklus Diadochus. Kommentar zur ersten Buch von Euklids «Elementen». Übers. M. Steck. Halle, 1945.
- Ptolemaei Claudii Opera quae extant omnia, v. 1—3. Ed. J. L. Heiberg. Lipsiae, 1898—1907.
- Ptolemäus. Handbuch der Astronomie, Bd 1—2. Übers. K. Manitius, Vorwort und Berichtigung von O. Neugebauer. 2. Aufl. Leipzig, 1963.
- [Ptolémée] Composition mathématique de Claude Ptolémée ou astronomie ancienne, v. 1—2. Trad. N. Halma, 2^{de} éd. Paris, 1927.
- Théodose de Tripoli. Les sphériques. Trad. par P. ver Eecke. Bruges, 1927.
- Theodosios von Tripoli. Sphaerik. Übers. und von Anmerkungen versehen von A. Czwalina. Leipzig, 1931.

6) Исследования

- Алимов Н. Г. Величина и отношение у Евклида.— ИМИ, 1955, т. VIII, 573—616.
- Башмакова И. Г. Арифметические книги «Начал» Евклида.— ИМИ, 1948, т. I, 296—328.
- Башмакова И. Г. Дифференциальные методы в работах Архимеда.— ИМИ, 1953, т. VI, 609—658.
- Башмакова И. Г. Трактат Архимеда «О плавающих телах».— ИМИ, 1956, т. IX, 759—788.
- Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в Древней Греции.— ИМИ, 1958, т. XI, 225—438.
- Башмакова И. Г. Об античной математике первых веков нашей эры.— ИМИ, 1961, т. XIV, 473—490.
- Башмакова И. Г. О некоторых проблемах античной математики.— ИМИ, 1963, т. XV, 37—50.
- Башмакова И. Г. Диофант и Ферма.— ИМИ, 1967, т. XVII, 185—204.
- Богомолов С. А. Актуальная бесконечность (Зенон Элейский, Ис. Ньютон, Г. Кантор). М.—Л., 1934.
- Веселовский И. Н. Архимед. М., 1957.

- Беселовский И. Н.* Аристарх Самосский — Коперник античного мира. — Историко-астрономические исследования, 1961, вып. 7, 11—70.
- Выгодский М. Я.* «Начала» Евклида. — ИМИ, 1948, т. I, 247—295.
- Гейберг И. Л.* Естествознание и математика в классической древности. Предисловие А. П. Юшкевича. М. — Л., 1936.
- Зубов В. П.* Аристотель. М., 1963.
- Каган В. Ф.* Архимед, краткий очерк о жизни и творчестве. 2-е изд. М. — Л., 1951.
- Колман Э. Я.* Бесконечность в древнегреческой математике. — Труды ИИЕТ, 1956, т. 10, 299—337.
- Кольман Э.* О некоторых нерешенных вопросах истории античной математики. — ИМИ, 1958, т. XI, 159—170.
- Лурье С. Я.* Теория бесконечно малых у древних атомистов. М. — Л., 1935.
- Лурье С. Я.* Приближенные вычисления в древней Греции. — Архив истории науки и техники, 1936, вып. VI, 21—46.
- Лурье С. Я.* Архимед. М., 1945.
- Лурье С. Я.* Очерки по истории античной науки. М. — Л., 1947.
- Лурье С. Я.* Три этюда к Архимеду. — Науч. зап. Львовского ун-та, серия механ.-матем., 1956, т. 38, № 7, 7—30.
- Майстров Л. Е.* О статье М. Я. Выгодского «Начала» Евклида. — ИМИ, 1949, т. II, 505—507.
- Маркушевич А. И.* О классификации иррациональностей в X книге «Начал» Евклида. — ИМИ, 1948, т. I, 329—342.
- Молодший В. Н.* Был ли Евклид последователем Платона? — ИМИ, 1949, т. II, 499—504.
- Павс М. Е.* О приближенном вычислении квадратных корней в древней Греции. — ИМИ, 1965, т. XVI, 249—234.
- Паук А. Е.* Десятая книга «Начал» Евклида. — ИМИ, 1948, т. I, 343—384.
- Сабо А.* О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования. — ИМИ, 1959, т. XII, 321—392.
- Юшкевич А. П.* О методе исчерпывания древних математиков. — Труды Совещания по истории естествознания. М., 1948, стр. 173—182.
- Яновская С. А.* Из истории аксиоматики. — ИМИ, 1958, т. XI, 63—96.
- Becker O.* Eudoxos-Studien. — QS (B), Bd 2, 1932, 341—333, 369—387; Bd 3, 1936, 236—244, 370—410.
- Becker O.* Das mathematische Denken der Antike. Göttingen, 1957.
- Beckmann F.* Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euclids. — AHES, 1967, v. 4, N 1/2.
- Dijksterhuis E. J.* Archimedes. København, 1956.
- Frank E.* Plato und die sogenannten Pythagoräer. Halle, 1923.
- Heath T. L.* A history of Greek mathematics, v. 1—2. Cambridge, 1912.
- Heath T. L.* A manual of Greek mathematics. Oxford, 1931.
- Heath T. L.* Mathematics in Aristotle. Oxford, 1949.
- Heath T. L.* Diophantus of Alexandria. A study in the history of Greek algebra, 2nd ed. Cambridge, 1910, new ed. N. Y., 1964.
- Itard J.* Lex livres arithmétiques d'Euclide. Paris, 1961.
- Junge G.* Das Fragment der lateinischen Übersetzung des Pappuskommentars zum 10. Buche Euclids. — QS (B), Bd 3, 1936, 1—17.
- Junge G., Thomson W.* The commentary of Pappus on book X of Euclid's Elements. Cambridge, 1930.
- Klein J.* Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra. — QS (B), Bd 3, 18—105, 122—235.
- Neugebauer O.* Apollonius-Studien. — QS (B), Bd 2, 1933, 245—254.
- Reidemeister K.* Das exakte Denken der Griechen. Hamburg, 1959.
- Tannery P.* Pour l'histoire de la science hellène, 2de éd. Paris, 1930.
- Tóth J.* Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum. — AHES, 1967, v. 3, 249—422.
- Vernant J.* — P. Les origines de la pensée grecque. Paris, 1962.
- Youskevitch A.* Sur la méthode antique d'exhaustion. Mélanges Koyré, v. II. Paris, 1965.
- Zeuthen H. G.* Die Lehre von den Kegelschnitten in Altertum, Kopenhagen, 1886; Reprografischer Nachdruck mit einem Vorwort und Register von J. E. Hofmann. Hildesheim, 1966.

Литература ко II части I тома

1. Общие сочинения

- Ольшки Л. История научной литературы на новых языках, т. 1. Литература техники и прикладных наук от Средних веков до эпохи Возрождения. Перевод Ф. А. Коган-Бернштейн и П. С. Юшкевича. М.—Л., 1933; т. 2. Образование и наука в эпоху Ренессанса в Италии. Перевод Е. А. Косминского. М.—Л., 1934.
- Юшкевич А. П., Розенфельд Б. А. Математика в странах Востока в Средние века. ИИСВ, М., 1960, вып. 1, 349—421.
- Юшкевич А. П. История математики в Средние века. М., 1961.
- Crombie A. C. Augustine to Galileo, v. 1—2. London—Melbourne—Toronto, 1957.
- Juschkevitch A. P. Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Übers. von V. Ziegler. Leipzig, 1964.

2. Каталоги рукописей

- Розенфельд Б. А. Арабские и персидские физико-математические рукописи в библиотеках Советского Союза.— ФМСВ, 1966, вып. 1(4), 256—289.
- Brockelmann C. Geschichte der arabischen Litteratur, Bd 1—2, Suppl. Bd 1—3. Weimar, Berlin und Leiden, 1898—1942.
- Catalogus codicum astrologorum graecorum, descr. D. Bassi, F. Boll, P. Boudreaux, F. Cumont, I. Heeg, G. Kroll, A. Martini, A. Olivieri, A. Ruelle, etc., v. 1—12. Bruxelles, 1898—1953.
- Kennedy E. S. A survey of islamic astronomical tables, Transactions of the American Philosophical Society, 1956, v. 42, pt 2, 122—137.
- Krause M. Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker.— QS (B), Bd 3, 1936, 437—532.
- Suter H. Die Mathematiker und Astronomen der Araber und Ihre Werke.— AEMW, H. 10, 1900.

3. Литература к I главе

а) Первоисточники

- Математика в девяти книгах. Перевод, статья и примечания Э. И. Березкиной.— ИМН, 1957, т. X, 427—584.
- Математический трактат пяти ведомств. Перевод, статья и примечания Э. И. Березкиной.— ФМСВ, 1968, вып. 2(5), 82—97.
- Сунь Цзы. Математический трактат. Перевод, статья и примечания Э. И. Березкиной.— ИИСВ, 1963, вып. 3, 5—70.
- Чжан Цю-цзянь. Математический трактат. Перевод, статья и примечания Э. И. Березкиной.— ФМСВ, 1968, вып. 2(5), 18—81.
- Van Hée L. Le précieux miroir des quatre éléments. Asia Major, 1932, v. 7.
- Van Hée L. Le classique de l'île maritime, ouvrage chinois de III^{ème} siècle.— QS (B), Bd 2, 1933, 255—280.

б) Исследования

- Березкина Э. И. Арифметические вопросы в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах».— ИИСВ, 1960, вып. 1, 34—55.
- Березкина Э. И. Об одном древнекитайском математическом трактате.— ИМП, 1966, т. XVII, 261—272.
- Выгодский М. Я. Происхождение «правил двух ложных положений».— ИМН, 1960, т. XIII, 231—252.
- Юшкевич А. П. О достижениях китайских ученых в области математики.— ИМП, 1955, т. VIII, 539—572.
- Mikami Y. The development of mathematics in China and Japan. Leipzig—Berlin. 1913.
- Needham J. (with the collab. Wang Ling). Science and civilization in China, v. 3 (Mathematics and the sciences of the heavens and the earth). Cambridge, 1959.
- Van Hée L., Li Ieh, mathématicien chinois du XIII^{ème} siècle.— T'oung Pao, 1913, v. 14.
- Wang L., Needham J. Horner's method in Chinese mathematics: its origins in the root-extraction procedures of the Han dynasty.— T'oung Pao, 1955, v. 43, N 5.

4. Литература ко II главе

а) Первоисточники

- Шридхара*. Патиганита. Перевод О. Ф. Волковой и А. И. Володарского. Статьи и примечания А. И. Володарского.— ФМСВ, 1966, вып. 1(4), 141—246.
- Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhāscara*. Transl. by H. T. Colebrooke. London, 1817. Reprinted with Sanscrit text by H. C. Banerji. Calcutta, 1927.
- Das Apastamba — Sulvasūtra*. Hrsg. A. Bürk.— Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft, 1901, Bd 55, 543—591, Bd 56, 1901, 397—391.
- The Aryabhatiya of Aryabhata*, an ancient Indian work on mathematics and astronomy. Transl. W. E. Clark with notes. Chicago, 1930.
- Baudhayana*. The Sulvasūtra. Ed G. Thibaut.— Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal Science, 1874—1876, v. 9—10, New Series, 1876—1877, v. 1.
- Burgess E., Whitney G.* The Surya Siddhanta.— Journal of the American Oriental Society, 1859—1860, v. 6.
- Kātyāyana*. Sulvapariśiṣṭa. Ed. G. Thibaut.— Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal Science, New Series, 1882, v. 4.
- Kaye G. R.* The Bakhshali manuscript. A study in medieval mathematics, v. 1—3. Calcutta, 1927—1933.
- Mahāvīracarya*. The Ganita Sara-Sangraha. Ed. and transl. M. Rangacharya with notes. Madras, 1912.
- Srīdharacarya*. The Patiganita with ancient Sanscrit commentary. Ed. and transl. K. S. Shukla with introduction and notes. Lucknow, 1959.
- Srīdharacarya*. The Trisatika, ed. N. Ramanujacharia and G. R. Kaye.— BM (3), 1912—1913, Bd 13.
- The Sūrya-siddhanta with the commentary of Paramesvara*. Ed. K. S. Shukla. Lucknow, 1957.
- Varahamihira*. Pañca-siddhāntikā. Ed. G. Thibaut and S. Dvivedi, 2nd ed. Lahore, 1930.

б) Исследования

- Бажмутская Э. Я.* Степенные ряды для $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в работах индийских математиков XV—XVIII вв.— ИМИ, 1960, т. XIII, 325—334.
- Бажмутская Э. Я.* Бесконечные ряды в работах математиков Южной Индии в XV—XVIII вв.— ИИСВ, 1961, вып. 2, 174—189.
- Бобылин В. В.* Древнеиндусская математика и отношение к ней древней Греции.— Изв. Казанского физ.-матем. об-ва. Казань, 1916.
- Володарский А. И.* О трактате Магавиры «Краткий курс математики».— ФМСВ, 1968, вып. 2(5), 98—130.
- Datta B.* The science of the Sulva. A study of early Hindu mathematics. Calcutta 1932.
- Datta B., Singh A. N.* History of Hindu mathematics, v. 1—2. Bombay, 1963.
- Kaye G. R.* Indian mathematics. Isis, 1914, v. 2, 326—356.
- Mukunda M. K., Rajagopal C. T.* On the Hindu quadrature of the circle; Bale gadharan. Appendix.— Journal of Bombay Branch of the Royal Asiatic Society, 1944, v. 20.
- Rajagopal C. T., Vedamurti Aiyar T. V.* A neglected chapter of Hindu Mathematics.— Scripta mathematica, 1949, v. 15.
- Rajagopal C. T., Vedamurti Aiyar T. V.* On the Hindu proof of Gregory's series.— Scripte mathematica, 1951, v. 17.
- Rajagopal C. T., Vedamurti Aiyar T. V.* A Hindu approximation to π .— Scripta mathematica, 1952, v. 18.
- Rajagopal C. T., Venkataraman A.* The sine and cosine power series in Hindu mathematics.— Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal Science, 1949, v. 15, N 1.

5. Литература к III главе

а) Первоисточники

- Абу-л-Вафа*. Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений. Перевод и примечания С. А. Красновой.— ФМСВ, 1966, вып. 1(4), 56—140.
- Бану Муса*. Книга измерения плоских и шаровых фигур. Перевод и примечания Дж. ал-Даббха.— ИМИ, 1965, т. XVI, 389—426.

- Ал-Бируни*. Тракта́т об определении хорд в кру́ге при помо́щи ломаной ли́нии, впи́санной в него. Перевод С. А. Красновой и Л. А. Карповой и примечания Б. А. Розенфельда и С. А. Красновой.— ИИСВ, 1963, вып. 3, 93—147.
- Ал-Бируни*. Кни́га об инди́йских ра́тиках. Перевод и примечания Б. А. Розенфельда.— ИИСВ, 1963, вып. 3, 148—170.
- Бируни*. Памя́тники ми́нувших поколе́ний. Избранные произведе́ния, т. 1. Перевод и примечания М. А. Салье. Ташкент, 1957.
- Бируни*. Индия. Избранные произведе́ния, т. 2. Перевод Ю. Н. Завадовского и А. Б. Халидова. Комментарий В. Г. Эрмана и А. Б. Халидова. Ташкент, 1963.
- Бируни*. Геоде́зия. Избранные произведе́ния, т. 3. Перевод, статья и примечания П. Г. Булгакова. Ташкент, 1966.
- Бируни и Ибн Сина*. Десять вопро́сов Бируни относительно «Кни́ги о небе» Аристо́теля и отве́ты Ибн Си́ны. Восе́м вопро́сов Бируни относительно «Физи́ки» Аристо́теля и отве́ты Ибн Си́ны. Перевод Ю. Н. Завадовского. Матери́алы по исто́рии прогрессивной обще́ственно-фило́софской мы́сли в У́збекиста́не. Под редакцией Н. М. Муми́нова. Ташкент, 1957, стр. 128—162.
- Ибн Корра*. Кни́га о том, что две ли́нии, прове́денные под уго́лом, меньше́м двух пря́мых, встре́чаются. Перевод и примечания Б. А. Розенфельда.— ИМИ, 1963, т. XV, 363—380.
- Ибн Корра*. Кни́га о составле́нии отноше́ний. Перевод, статья и примечания Б. А. Розенфельда и Л. М. Карповой.— ФМСВ, 1966, вып. 1(4), 5—41.
- Ибн Сина*. Кни́га зна́ния. Перевод Б. А. Розенфельда и Н. А. Садовского. Статья и примечания Б. А. Розенфельда и С. У. Умарова. Душанбе, 1967.
- Ибн Синан*. Кни́га о постро́ении трех ко́нических сече́ний. Перевод Дж. ад-Даббаха и С. А. Красновой. Примечания С. А. Красновой.— ИМИ, 1965, т. XVI, 427—446.
- Ибн ал-Хайсам*. Тракта́т об изо́периметри́ческих фи́гурах. Перевод и примечания Дж. ад-Даббаха.— ИМИ, 1966, т. XVII, 399—448.
- Ибн ал-Хайсам*. Кни́га об изме́рении ша́ра. Перевод и примечания Дж. ад-Даббаха.— ФМСВ, 1968, вып. 2(5), 131—146.
- Ал-Каши*. Ключ арифме́тики. Тракта́т об окру́жности. Перевод Б. А. Розенфельда. Редакция В. С. Сегалия и А. П. Юшкевича. Комментарий А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда. М., 1956.
- Ал-Насаи*. Достаточное об инди́йской арифме́тике. Перевод М. И. Медового. Примечания М. И. Медового и Б. А. Розенфельда.— ИМИ, 1963, т. XV, 381—430.
- Ар-Руми*. Тракта́т об определе́нии синуса́ одно́го гра́дуса. Перевод Б. А. Розенфельда. Статья и примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича.— ИМИ, 1960, т. XIII, 533—556.
- Собра́ние пра́вил нау́ки астроно́мии. III кнѳа. Перевод и примечания Н. Г. Хайретди́новой.— ФМСВ, 1968, вып. 2(5).
- Туси Насирэддин*. Тракта́т о полно́м четы́рехсто́роннике. Перевод под редакцией Г. Д. Мамедбе́йли и Б. А. Розенфельда. Баку, 1952.
- Ат-Туси*. Тракта́т, исче́дающий сомне́ние по по́воду параллельных ли́ний. Перевод Б. А. Розенфельда, примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича.— ИМИ, 1960, т. XIII, 483—532.
- Ат-Туси*. Собра́ник по арифме́тике с помо́щью до́ски и шы́ли. Перевод С. А. Ахмедова и Б. А. Розенфельда. Примечания С. А. Ахмедова.— ИМИ, 1963, т. XV, 431—444.
- Ал-Фараби*. Комментарий Абу́ Насра́ ал-Фара́би к трудно́стям во введе́нии к пер́вой и пя́той кни́ге Евкли́да. Перевод М. Ф. Бокштей́на. Введе́ние и примечания Б. А. Розенфельда.— Пробле́мы восто́коведѳния, 1959, № 7.
- Хаййам*. Тракта́ты. Перевод Б. А. Розенфельда. Редакция В. С. Сегалия и А. П. Юшкевича. Статья и комментарий Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. М., 1962.
- Хайям*. Пер́вый алгебра́ический тракта́т. Перевод и примечания С. А. Красновой и Б. А. Розенфельда.— ИМИ, 1963, т. XV, 445—472.
- Ал-Хорезми*. Матема́тические тракта́ты. Перевод Ю. Х. Копеле́вич и Б. А. Розенфельда. Комментарий Б. А. Розенфельда. Ташкент, 1964.
- [*Abu Kamil*]. The Algebra of Abu Kamil in a commentary by Mordecai Finzi. Hebrew text, transl. and commentary with special reference to the Arabic text by M. Levey. Madison — Milwaukee—London, 1966.
- Alhazeni Arabis Opticae Thesaurus. Ed. F. Risner. Basileae, 1572.
- Anarithi in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ed. M. Curtze. Leipzig, 1899.
- Al-Biruni*. Al-Qanunul-Mas'udi (Canon Masudicus), v. 1—3. Hyderabad, 1954—1956.
- Ibn al-Banna*. Le Talkhys d'Ibn Albanna, publié et traduit par A. Marre. Atti dell'Accad. Pontif. dei Nuovi Lincei, 1864, t. 17.

- [*al-Kalçadi*]. *Traité d'arithmétique d'Aboufîl Haçan Ali ben Mohammed Alkalçadi*, trad. par F. Woepcke. *Atti dell'Accad. Pontif. de Nuovi Lincei*, 1859, v. 12.
- [*al-Karkhi*]. *Al Kafi fil Hisâb des Abû Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarkhi*, I—III, übers. von A. Hochheim. Halle(Saale), 1877—1880.
- [*al-Khayyami*]. *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits par F. Woepcke. Paris, 1851.
- [*al-Khawarizmi*]. *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Ed. and transl. by F. Rosen. London, 1831.
- [*al-Khawarizmi*]. Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of al-Khawarizmi. N. Y., 1915; 2nd ed. В кн.: *L. Ch. Karpinski, J. G. Winter. Contributions to the history of science*. Ann Arbor, 1930.
- [*al-Khawarizmi*]. Die astronomischen Tafeln des Muhammed ibn Musa al-Khawarizmi in der Bearbeitung des Maslama ibn Ahmed al-Madjriti und der lateinischen Übersetzung des Athelhard von Bath, auf Grund der Vorarbeiten von A. Björnbo und R. Besthorn herausg. und komm. von H. Suter, *Mémoires de l'Acad. des Sciences de Danemark*, Copenhagen, 7^{ème} série, section des lettres, 1914, v. 3, N 1.
- [*al-Khwārizmī*]. The astronomical tables of al-Khwārizmī, translation with commentaries by A. Neugebauer of the Latin Version edited by H. Suter. *Historisk-filos. skrifter udg. af det Kong. Danske Vidensk. Selskab*, København, 1962, v. 4, N 2.
- [*al-Khawarizmi*]. Mohammed ibn Musa Alkhwarizmi's *Algorismus*, herausg. von K. Voegl. Aalen, 1963.
- Kushyar ibn Labban*. Principles of Hindu reckoning, ed. and transl. M. Levey and M. Petrucci with introduction and notes. Madison-Milwaukee, 1965.
- Mishnat ha-Middot*, the first Hebrew Geometry of about 150 C. E. and the Geometry of Muhammed ibn Musa al-Khawarizmi, the first Arabic Geometry (c. 820). Ed. and transl. S. Gandz with introduction and notes.— *QS(A)*, Bd 2, 1932.
- [*Thabit ibn Qurra*]. *Thabits Werk über den Transversalensatz (liber de figura sectoris)*, herausg. von A. Björnbo, H. Bürger und K. Kohl, mit Bemerkungen von H. Suter. *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und Medizin*. Erlangen, H. 7, 1924.
- Thabit b. Qurra*. Ein Werk über ebene Sonnenuhren, Herausg., übers. und erläutert von K. Garbers.— *QS(A)*, Bd 4, 1936.
- Trattati d'arithmetiche publicati da Baldassare Boncompagni*, I. *Algoritmi de numero indorum*. II. *Ioanni Hispalensis liber algorismi de practica arismetrice*. Roma, 1857.
- Trois traités arabes sur le compas parfait, éd. et trad. par F. Woepcke.— *Notices et extraits des manuscrits de Bibliothèque Nationale*, 1874, v. 22, 1—147.

б) Исследования

- Кары-Ниязов Т. Н. *Астрономическая школа Улутбека*. М., 1950; 2-е изд. Избранные труды, т. VI, Ташкент, 1967.
- Краснова С. А. Геометрические построения на средневековом Востоке.— *ФМСВ*, 1966, вып. (4), 42—55.
- Мамедбейли Г. Д. Основатель Марагинской обсерватории Насирэддин Туси. Баку, 1961.
- Мамедбейли Г. Д. Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных и теории отношений. Баку, 1959.
- Матиевская Г. П. К истории математики в Средней Азии. Ташкент, 1961.
- Матиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент, 1967.
- Матиевская Г. П. К истории учения о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке.— *ИМИ*, 1966, т. XVII, 273—280.
- Медовой М. И. Об одном случае применения отрицательных чисел у Абу-л-Вафы.— *ИМИ*, 1958, т. XI, 593—600.
- Медовой М. И. Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы.— *ИМИ*, 1960, т. XIII, 253—324.
- Розенфельд Б. А. О математических работах Насирэддина Туси.— *ИМИ*, 1951, т. IV, 489—512.
- Розенфельд Б. А. Доказательства пятого постулата Евклида средневековых математиков Хасана ибн ал-Хайсама и Льва Герсониды.— *ИМИ*, 1958, т. XI, 733—742.
- Розенфельд Б. А., Краснова С. А., Рожанская М. М. О математических работах Абу-р-Райхана ал-Бируни.— *ИИСВ*, 1963, вып. 3, 71—92.
- Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в Средние века.— *Советское востоковедение*, 1958, № 3, 6.

- Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П.* Доказательства пятого постулата Евклида у Сабита ибн Корры и Шамс ад-Дина ас-Самарканди.— ИМИ, 1961, т. XIV, 587—592.
- Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П.* Омар Хайям. М., 1965.
- Садыков Х. У.* Бируни и его работы по астрономии и математической географии. М., 1953.
- Собиоров Г. С.* Анализ математических трудов ал-Кушчи. Положительные и отрицательные числа у ал-Кушчи. Вопросы истории и методики элементарной математики, вып. II (Уч. зап. Душанбинского гос. пед. ин-та, т. 47). Душанбе, 1965, стр. 34—55, 72—77.
- Хайретдинова Н. Г.* Тригонометрический трактат исфаханского анонима.— ИМИ, 1966, т. XVII, 449—465.
- Юсупов Н.* Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке. Казань, 1933.
- Юшкевич А. П.* Омар Хайям и его «Алгебра».— Труды ИИЕ, 1948, вып. 2, 499—534.
- Юшкевич А. П.* О математике народов Средней Азии в IX—XV вв.— ИМИ, 1951, т. IV, 455—488.
- Юшкевич А. П.* Арифметический трактат Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми.— Труды ИИЕТ, 1954, т. 1, 85—127.
- Юшкевич А. П.* О квадратуре параболы Сабита ибн Корры. История и методология естественных наук, вып. V. М., 1965, стр. 118—125.
- Baker M.* Alhazen's problem, its bibliography and an extension of it.— American Mathematical Monthly, 1881, v. 4.
- Gandz W.* The sources of al-Khwarizmi's Algebra. Osiris, 1936, v. 1.
- Gandz W.* The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic Algebra. Osiris, 1937, v. 3, 405—557.
- Hartner W., Schramm M.* Al-Biruni and the theory of Solar apogee. What was original in Arabic science? Symposium on the History of Science. Oxford, 1961.
- Irani Rida A. K.* Arabic numeral forms. Centaurus, 1955, v. 4.
- Juschkeewitsch A. P.* Über ein Werk des Abu Abdallah Muhammad ibn Mūsā al-Ḥuwārizmī al-Mağūsī zur Arithmetik der Inder. Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften. Technik und Medizin (Zum 60. Geburtstag von G. Harig). Leipzig, 1964, S. 21—63.
- Kennedy E. S., Transue W. R.* A medieval iterative algorism.— American Mathematical Monthly, 1956, v. 63, N 2.
- Kubesov A., Rosenfeld B. A.* On the geometrical of al-Farabi, AHS, 1969, v. 86—87, p. 50.
- Luckey P.* Tabit b. Qurra über der geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen.— Berichte der math.-phys. Klasse der Sächs. Akademie der Wissenschaften. 1941, Bd 93, 93—114.
- Luckey P.* Die Ausziehung des n -ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik.— Mathematische Annalen, Bd 120, 1948.
- Luckey P.* Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters. Forschungen und Fortschritte, 1948, Bd 24, H 17—18, S. 15—75.
- Luckey P.* Die Rechenkunst bei Caḥsīd b. Mas'ūd al'Kāṣī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens. Wiesbaden, 1950.
- Mieli A.* La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondiale. Leyden, 1938.
- Plooijs E. B.* Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by Arabian commentators. Rotterdam, 1950.
- Ruska J.* Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Philos.— Hist. Klasse, 1917.
- Saidan A. S.* The earliest extant Arabic Arithmetic Kitāb al-Fuṣūl fi al-Hisāb al-Hindī of Abū al-Ḥasan Aḥmad ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī. Isis, 1966, v. 57, N 4, 475—490.
- Sayili A.* Logical necessities in mixed equations by Abd al Ḥamīd ibn Turk and the algebra of his time... Ankara, 1962.
- Schirmer O.* Studien zur Astronomie der Araber.— SBPMS, 1926, Bd 58/59, 33—83.
- Schoy C.* Des trigonometrische Lehren des persischen Astronomen Abū-l-Raḥān ibn Aḥmad al-Bīrūnī, dargestellt nach al-Qānūn al-Maṣūfī. Hannover, 1927.
- Smith D. E., Karpinski L. C.* The Hindu-Arabic numerals. Boston — London, 1911.
- Steinschneider M.* Alfarabi, des arabischen Philosophen Leben und Schriften mit besonderer Rücksicht auf die Geschichte der Griechischem Wissenschaft unter den Arabern. Mém. de l'acad. des Sciences de St.-Petersbourg, 7^{ème} série, 1869, v. 13, N 4.

- Steinschneider M.* Euklid bei den Arabern. Eine bibliographische Studie.— *Zeitschrift für Math. und Physik*, 1886, Bd 31, 81—110.
- Steinschneider M.* Die Mathematik bei de Juden.— *BM* (2), 1893—1899, Bd 7—43.
- Steinschneider M.* Die arabischen Übersetzungen aus dem Griechischen.— *Mathematik.— Zeitschrift der Deutschen Morgenländ. Gesellschaft*, 1896, Bd 50, 161—219, 337—417.
- Steinschneider M.* Die arabische Literatur der Juden. Frankfurt a. M., 1902.
- Suter H.* Die Abhandlung Qosta ben Luqas und zwei andere Anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern.— *BM* (3), 1908/1909, Bd 9, 111—122.
- Suter H.* Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kamil el-Misri.— *BM* (3), 1910/1911, Bd 11, 100—120.
- Suter H.* Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von el-Hasan b. el-Haitam.— *BM* (3), 1911/1912, Bd 12, 289—332.
- Suter H.* Über die Ausmessung der Parabel von Thabit b. Kurra al-Harrani.— *SBPMS*. 1916/1917, Bd 48/49, 65—86.
- Suter H.* Die Abhandlungen Thābit b. Kurras und Abū Sahl al-Kūhīs über die Ausmessung der Paraboloides.—*SBPMS*, 1916/1917, Bd 48/49, 186—227.
- Suter H.* Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm b. Sinān B. Thābit. Vierteljahrsschrift d. Naturforsch.-Gesellschaft Zürich, 1918, Bd 63, № 1—2, 214—228.
- Wiedemann E.* Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften I—LXXIX.— *SBPMS*, 1902—1928, Bd 34—60.
- Wiedemann E.* Die Schrift über den Qarastūn.— *BM* (3), 1911/1912, Bd 12, 21—39.
- Wieleitner H.* Die Erbteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musa Alchwarizmi.— *Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht*, 1922, Bd 53, 57—67.
- Woepcke F.* Extrait du Fakhri, précédé d'un mémoire sur l'Algèbre indéterminée chez les Arabes. Paris, 1853.

6. Литература к IV главе

а) Первоисточники

- Вопросы и решения вардапета Анании Ширакаци армянского математика VII века, издал и перевел И. А. Орбели. Пб., 1918.
- Герсонид.* Комментарий к введению книги Евклида. Перевод И. Г. Польского. Примечания Б. А. Розенфельда.— *ИМИ*, 1958, т. XI, 763—782.
- Кирик Новгородец.* Учение иже ведати человеку числа всех лет. Перевод В. П. Зубова и Т. А. Коншиной. Примечания и статья В. П. Зубова.— *ИМИ*, 1953, т. VI, 174—195.
- Магницкий Л. Ф.* Арифметика сиречь наука числительная. М., 1703.
- Неморарий.* О данных числах. Перевод и примечания С. Н. Шрейдера. Под редакцией И. П. Веселовского.— *ИМИ*, 1959, т. XII, 559—678.
- Орем Н.* Трактат о конфигурации качеств. Перевод, статья и примечания В. П. Зубова.— *ИМИ*, 1958, т. XI, 601—732.
- Памятники древней письменности. СПб., 1878—1879.
- Петрици И.* Рассмотрение платоновской философии и Прокла Диадоха. Перевод и исследование И. Д. Панцхава. Тбилиси, 1942.
- Счетная мудрость. Труды общества любителей древней письменности, т. 43. СПб., 1879.
- Alcuin.* Propositiones ad acuendos iuvenes. Ed. G. Thiele. London, 1905.
- Beda* Venerabilis Opera omnia, v. 1—42. Ed. J. A. Liles. London, 1843—1844.
- [*Bradwardine*]. Thomas Bradwardine, his Tractatus de proportionibus, its significance for the development of mathematical physics. Ed. and transl. by H. Lamar Crosby, jr. Madison-Milwaukee, 1955.
- Gerberti postea Silvestri II papae Opera mathematica.* Ed. N. Bubnov. Berlin, 1899.
- Leonardo Pisano.* Scritti, v. 1—2. Pubbl. de B. Boncompagni. Roma, 1857—1862.
- The medieval science of weights (*Scientia de ponderibus*); treatise ascribed to Euclid, Archimedes, Thabit ibn Qurra, Jordanus de Nemore and Eliasius of Parma. Ed. E. A. Moody and M. Clagett, Madison—Milwaukee, 1952.
- Murdoch J. E.* The medieval language of proportion. Scientific change. Ed. C. A. Crombie. London, 1963.
- Oresme N.* De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes. Ed. and transl. by E. Grant. Madison—Milwaukee, 1966.

Oresme N. Quaestiones super Geometriam Euclidis. Ed. H. L. L. Busard. Leiden, 1961.
[*Oresme N.*] Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. A treatise... known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum. Ed. M. Claggett. Madison, Milwaukee and London, 1968.

б) Исследования

- Бобынин В. В.* Очерки истории развития физико-математических знаний в России, вып. 1—2. М., 1886—1893.
- Бубнов Н. М.* Арифметическая самостоятельность европейской культуры, т. 1—2. Киев, 1908.
- Бубнов Н. М.* Происхождение и история наших цифр, палеографическая попытка. Киев, 1908.
- Бубнов Н. М.* Подлинное сочинение Герберта об абаке или система элементарной классической древности. Киев, 1911.
- Егаян А. М.* Математика в Армении с V по VII век. Сборник научных трудов Армянского гос. заочн. пед. ин-та, 1967, № 6, ч. 2, стр. 1—80.
- Зубов В. П.* Из истории средневековой атомистики. — Труды ИИЕ, 1947, вып. 1, 283—314.
- Зубов В. П.* Вопрос о «неделимых» и бесконечном в древнерусском литературном памятнике XV века. — ИМИ, 1950, т. III, 407—430.
- Зубов В. П.* Кирик Новгородец и древнерусские деления часа. — ИМИ, 1953, т. VI, 196—212.
- Зубов В. П.* О некоторых математических трудах Николая Орема. — Труды ИИЕТ, 1960, т. 34, 343—349.
- Зубов В. П.* Трактат Бравдвардина «О континууме». — ИМИ, 1960, т. X, 385—440.
- Зубов В. П.* Николай Орем и его математико-астрономический трактат «О соизмеримости или несоизмеримости движений неба». — Историко астрономические исследования, 1960, вып. 6, 301—400.
- Зубов В. П.* Об «архимедовой традиции» в Средние века (трактат Герарда Брюссельского «О движении»). — ИМИ, 1965, т. XVI, 235—272.
- Зубов В. П.* Развитие атомистических представлений до начала XIX в. М., 1966.
- Петросян Г. Б.* Математика в Армении в древних и средних веках (на армянском языке с резюме на русском и английском языках). Ереван, 1959.
- Спаский И. Г.* Происхождение и история русских счетов. — ИМИ, 1952, т. V, 269—420.
- Цхакая Д. Г.* История математических наук в Грузии с древних времен до начала XX в. Тбилиси, 1959.
- Birkenmajer A.* Witelo, najdawniejszy śląski uczony. Katowice, 1936.
- Carlebach J.* Levi ben Gerson als Mathematiker, ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden. Berlin, 1909.
- Clagett M.* Archimedes in the middle ages, v. 1. The Arabo-Latin tradition. Madison—Milwaukee, 1961.
- Clagett M.* The science of Mechanics in the middle ages. Madison—Milwaukee, 1959.
- Crombie A. C.* Robert Grosseteste and the origins of experimental science. Oxford, 1953.
- Curtze M.* Der Algorithmus proportionum des Nicolaus Oresme. Berlin, 1868.
- Curtze M.* Jordani Nemorarii Geometria vel de Triangulis libri IV. Mitteil. des Coppernicus — Vereins. Thorm, 1887, Bd 6.
- Curtze M.* Die Abhandlung des Levi ben Gerson über Trigonometrie und den Jacobstab. — BM (2), 1898, № 4, 97—112.
- Curtze M.* Über eine Algorithmusschrift des XII. Jahrhunderts. — Zeitschrift für Math. und Phys., 1898, Bd 42, Suppl.
- Curtze M.* Der Liber embardoria des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli. — AGMW, 1902, Bd 12.
- Hunger H., Vogel K.* Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts. Text, Übersetzung und Kommentar. Wien, 1963.
- Libri G.* Histoire des sciences mathématiques en Italie, v. 1—2. Paris, 1833—1838.
- Steinschneider M.* Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters. Berlin, 1893.
- Steinschneider M.* Die europäischen Übersetzungen aus den Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts. Sitzungsber. der Wiener Akad., philos.-hist. Kl., 1904, Bd 149; 1905, Bd 151.
- Vogel K.* Die Practica des Algorithmus Ratisbonensis. München, 1954.
- Wieleitner H.* Über den Funktionenbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme. — BM (3), 1914, Bd 14.

- Wieleitner H.* Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter.— *BM* (3), 1914, Bd 14.
- Wieleitner H.* Zur Frühgeschichte der Räume von mehr als drei Dimensionen. *Isis*, 1925, v. 7.
- Wilson C.* William Heytesbury: Medieval logic and the rise of mathematical physics. Madison—Milwaukee, 1957.

7. Литература к V главе

а) Первоисточники

- Да Винчи.* Книжки о живописи. Перевод А. А. Губера и В. К. Шайке. М., 1934.
- Да Винчи.* Избранные естественно-научные произведения. Редакция, перевод, статья и комментарии В. П. Зубова. М., 1955.
- Коперник Н.* О вращениях небесных сфер. Перевод И. Н. Весселовского. Статья и общая редакция А. А. Михайлова. М., 1964.
- Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem magistrum suum*, herausg. M. Curtze.—*AGMW*, 1902, Bd 13, 435—609.
- Bombelli R.* Algebra. Bologna, 1572.
- Cardanus H.* Ars magna sive de Regulis algebraicis. Norimbergae, 1545.
- Clavius C.* Euclidis Elementorum, libri XV. Romae, 1574.
- Dürer A.* Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit. Nürnberg, 1523.
- Dürer A.* Von menschlicher Proportion. Nürnberg, 1528.
- Ghetaldi M.* Opera omnia, red. Z. Dadić. Zagrabia, 1963.
- Marre A.* Le Tripartite en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien.—*Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche di Boncompagni*, 1880, v. 13; 1881, v. 14.
- Nikolaus von Cues.* Die mathematischen Schriften. Übersetzung, Einführung und Anmerkungen von J. E. Hofmann. Hamburg, 1952.
- Pacioli L.* Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita. Venetiae, 1494.
- Rami P.* Prooemium Mathematicum. Parisii, 1567.
- Rami P.* Scholarum Mathematicarum libri unus et triginta. Basileae, 1569.
- Rami P.* Arithmeticae libri duo. Geometriae libri septem et viginti. Basileae, 1569.
- Rami P.* Arithmeticae libri duo et Algebrae libri duo. Ed. L. Schoner. Francofurti, 1586.
- Regiomontanus.* On triangles. Ed. and transl. Barnabas Hughes. Madison—Milwaukee—London, 1967.
- [Rudolf C.]* Die Coss Christoff Rudolffs mit schönem Exempeln der Coss durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt. Königsberg i. P., 1553.
- Stevin S.* The principal works, v. II. Mathematics. Ed. D. J. Struik. Amsterdam, 1958.
- Stifel M.* Arithmetica integra. Norimbergae, 1544.
- Stifel M.* Deutsche Arithmetik. Nürnberg, 1545.
- Tartaglia N.* Quesiti et inventioni diversi. Venezia, 1546.
- Tartaglia N.* General trattato di numeri et misure. Venezia, 1560.
- Vietae Francisci Opera mathematica.* Lugduni Batavorum, 1646; перепечатано под названием: *Vieta Fr.* Opera mathematica recognita Francisci à Schooten. Vorwort und Register von J. E. Hofmann. Hildesheim,—New York, 1970.
- Viète Fr.* Introduction à l'art analytique; Première série des notes sur la logistique spéciale, trad. par F. Ritter.—*Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche*, 1868, t. I, 223—276.

б) Исследования

- Белый Ю. А., Шесцов К. И.* Об одной русской геометрической рукописи первой четверти XVII в.— *ИМН*, 1959, т. XII, 185—244.
- Гарсиа Г. Г.* Спор Тарталья и Кардана о кубических уравнениях и его общественные основы.— *Архив истории науки и техники*, 1935, т. VII, 67—104.
- Депман И. Я.* «Геометрия практика».— *ИМН*, 1955, т. VIII, 620—629.
- Зубов В. П.* Леонардо да Винчи и работа Вителло «Перспектива».— *Труды ИИЕТ*, 1954, т. 1, 219—248.
- Зубов В. П.* Леонардо да Винчи. М.—Л., 1961.

- Майстров Л. Е.* О математических знаках и терминах, встречающихся в археологических памятниках древней Руси.— ИМИ, 1957, т. X, 595—616.
- Феттер Г.* Краткий обзор развития математики в чешских землях до Белогорской битвы.— ИМИ, 1958, т. XI, 461—514.
- Berlet B.* Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu rechnen. Leipzig—Frankfurt a. M., 1892.
- Deubner F.* Nach Adam Ries. Leipzig—Jena, 1959.
- Dijksterhuis E. J.* Simon Stevin. Den Haag, 1943.
- Eneström G.* Ein verschollener Cossist aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts.— BM (3), 1902, Bd II.
- Hofmann J. E.* Michael Stifel. Wiesbaden, 1968.
- Ricci D. I.* Luca Pacioli, l'uomo e lo scienziato, con documenti inediti. San Sepolcro, 1940.
- Verdonk J. J.* Petrus Ramus en de wiskunde. Assen, 1966.
- Zeller M. C.* The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus. Ann Arbor, 1946.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ¹

- Аабо (A. Aaboe) 330
 Абель (Niels Hendrik Abel, 1802—1829) 105
 Абсолон (K. Absolon) 13
 Абу-л-Баки (= ал-Багдади)
 Абу-л-Вафа Мухаммед ибн Мухаммед ал-Буджани (940—998) 190, 213, 218, 230, 231, 236, 315, 324, 335, 337
 Абу Камил Шуджа ибн Аслам ибн Мухаммед ал-Хасиб ал-Мисри (ок. 850—930) 174, 206, 222, 227, 264—266, 268, 336, 338
 Августин (Augustinus, 353—430) 247
 Аверроэс (= Ибн Рушд)
 Авиценна (= Ибн Сина)
 Аделард из Бата (Adelhard of Bath, XII в.) 258, 259
 Александр Македонский (Ἀλέξανδρος, 356—323 до н. э.) 17, 20, 35, 59, 106, 154, 179
 Александров А. Д. (р. 1912) 327
 Алимов Н. Г. (1900—1957) 332
 Алкуин (Alcuin, 735—804) 174, 255, 339
 Альберти (Leon Battista Alberti, 1404—1472) 322, 323
 Альфонсо (XV в.) 325
 Альфонсо X (Alfonso, 1226—1284) 258
 Альхазен (= Ибн ал-Хайсам)
 Аменхотеп IV (XV в. до н. э.) 20
 Амид ал-Мулк Абу Наср Мансур ибн Мухаммед 237
 Анаксагор (Ἀναξαγόρας, V в. до н. э.) 59, 88, 94
 Анаксимандр (Ἀναξίμανδρος, 610—546 до н. э.) 64
 Анаксимен (Ἀναξίμηνος, VI в. до н. э.) 64
 Аватоллий Александрийский (Ἀνατόλιος, III в.) 144
 Андерсон (A. Anderson, 1582—1619) 308
 Андроник II (Ἀνδρόνικος, XIII—XIV в.) 250
 Андроник III (Ἀνδρόνικος, 1328—1341) 250
 Антифон (Ἀντίφωνος) 88, 315
 Анфемий Тралесский (Ἀνθέμιος, ум. 534) 249
 Апиан (Petrus Apianus, 1495—1552) 300
 Аполлоний (Ἀπολλώνιος, ок. 260—170 до н. э.) 79, 80, 83, 84, 107, 108, 114, 129—139, 144, 152, 153, 208, 221, 249, 259, 269, 331, 332
 Апулей (Licius Apuleius, ок. 135—180) 291
 Аргир (Ἰσαάκος Ἀργυρός, XIV в.) 250
 Аренс (W. Ahrens) 330
 Ариабхата I (р. 475) 179, 183, 185, 191—194, 198, 199, 201, 335
 Ариабхата II (X в.) 185
 Аристарх Самосский (Ἀρίσταρχος, III в. до н. э.) 95, 332
 Аристотель (Ἀριστοτέλης, 384—322 до н. э.) 11, 59—65, 67, 73, 74, 88—90, 93—96, 106, 107, 110, 152, 208, 234, 242, 243, 248, 249, 259, 268—277, 282, 307, 317, 331, 335
 Аристофан (Ἀριστοφάνης, 452—380 до н. э.) 107
 Артавазд (Νικόλαος Ῥαβδῶς Ἀρτάβασδος, XIV в.) 251, 252
 Архимед (Ἀρχιμήδης, 287—212 до н. э.) 40, 64, 67, 79, 80, 83, 86, 87, 94, 96, 101—107, 110, 111, 114—129, 138—141, 144, 151, 152, 208, 221—223, 229, 238—240, 244, 249, 259, 266, 269—271, 291, 308, 324, 328, 331—333, 330
 Архит Тарентский (Ἀρχύτας, ок. 428—365 до н. э.) 64, 66, 68, 70, 71, 82, 95
 Арчибальд (R. C. Archibald, 1875—1955) 328, 331

¹ В скобках указано: 1) более точное — в сравнении с принятым у нас — русское написание некоторых английских и голландских фамилий; 2) другое написание фамилий; 3) более полное написание фамилий и имен; 4) даты рождения и смерти или примерное время жизни упомянутого лица.

Асмус В. Ф. (р. 1899) 332
 Асархаддон (ум. 669 до н. э.) 17, 35
 Ахмедов С. А. (р. 1917) 336
 ал-Ашари Абу-л-Хасан Али ибн Исмаил
 (873/4—935/6) 243
 Ашока (273—232 до н. э.) 179
 Бабур (ум. 1530) 180
 ал-Багдади Мухаммед ибн Абу ал-Баки
 (ум. ок. 1100) 217
 ал-Балабаки (= Коста ибн Лука)
 Бану Муса (Мухаммед, ал-Хасан, Ахмед
 бану Муса ибн Шакир, IX в.) 221, 229,
 230, 238, 244, 335
 Бар Хийя Абраам (Savasorda, ок. 1070—
 ок. 1136), 258, 264
 Барбари Я. де (ок. 1450—ок. 1515) 287
 Барджесс (Е. Burgess) 335
 ал-Баттани Абу Абдалла Мухаммед ибн
 Джабир (ок. 850—929) 206, 235, 236,
 244, 320
 Батый (ум. 1225) 253
 Баудхайана (VII—V в. до н. э.) 335
 Бахмутская Э. Я. (р. 1916) 335
 Баше де-Мезерпак (С. G. Bachet de Mé-
 ziriak, 1587—1638) 150
 Башмакова И. Г. (р. 1921) 274, 328, 329,
 332
 Бада Достопочтенный (Baeda Venerabi-
 lis, ок. 673—735) 254, 339
 Бейкер (М. Baker) 338
 Беккер (О. Becker, р. 1889) 328, 333
 Бекман (F. Beckmann) 333
 Бекон Р. (Roger Bacon, ок. 1214—1294)
 247, 260, 269, 270, 272
 Бекон Ф. (Francis Bacon, 1561—1626),
 307
 Белл (Е. Т. Bell) 328
 Беллюстин В. 329
 Белый Ю. А. (р. 1925) 341
 Бен Гершон Леви (1288—1344) 325, 337,
 339
 Беневиц (= Апиан)
 Березкина Э. И. (р. 1931) 160, 334
 Берлет (B. Berlet) 341
 Бернайс (P. Bernays) 93
 Бернулли Д. (Daniel Bernoulli, 1700—
 1782) 124, 328
 Бернулли И. (Johann Bernoulli, 1667—
 1748) 281, 328
 Бернулли Я. (Jacob Bernoulli, 1654—
 1705) 281, 328
 Биркенмайер (A. Birkenmajer) 340
 ал-Бируни Абу-р-Райхан Мухаммед ибн
 Ахмед (973—ок. 1050) 206, 207, 218,
 223, 224, 226, 235—237, 242, 243, 335—
 338
 Бобынин В. В. (1849—1919) 18, 329, 331,
 335, 340
 Богомолов С. А. 332
 Боев Г. П. (1898—1961) 327, 331
 Бойер (С. В. Boyer) 328, 329
 Бокштейн М. Ф. (р. 1913) 336
 Больцано (Bernhard Bolzano, 1781—1848)
 92

Бомбелли (Raffaell Bombelli, ок. 1526—
 1573) 296—298, 304, 308, 341
 Бонола (Roberto Bonola, 1875—1914)
 329
 Бонфис Иммануил бен Якоб (XIV в.)
 214, 302
 Бортолотти (Ettore Bortolotti, 1866—
 1947) 297, 328
 Бозций (Anicetus Manlius Severinus Boe-
 thius, ок. 480—524) 254, 255, 267,
 270
 Бравдарлин (Брадуардин, Thomas Brad-
 wardine, ок. 1290—1349) 260, 270—273,
 317, 339, 340
 Браунмюль (A. von Braunmühl, 1853—
 1908) 329
 Брахмагупта (р. 598) 176, 177, 179, 190—
 198, 315
 Брёйнс (E. M. Bruins) 35, 50—52, 331
 Брёншвиц (L. Brunschvicg) 328
 Брилли (A. Brill) 329
 Брокельман (C. Brockelmann) 334
 Бубнов Н. М. (р. 1858) 340
 ал-Бузджани (= Абу-л-Бафа)
 Булгаков П. Г. 336
 Бурали-Форти (C. Burali Forti, 1861—
 1931) 91
 Бурбаки П. (N. Bourbaki) 100, 107, 109,
 119, 274, 328
 Бхаскара (1114—1185?) 174, 176, 180,
 181, 190—200
 Бэр (R. Baire, 1879—1932) 91
 Вазари Джорджо (G. Vasari, 1511—1574)
 322
 Вайман А. А. (р. 1922) 35, 55, 331
 Валлис (Уоллис, John Wallis, 1616—1703)
 306
 Вальтер (Bernhard Walter, XV в.) 272
 Ван Л. (L. Wang) 334
 Ван Сяо-тун (VII в.) 173
 Ван Хе (L. Van Hée) 334
 Вангенштен (O. C. L. Vangensteen) 285
 Ванцель (P. L. Wantzel, 1814—1848) 84
 Вань Фань (ум. 267) 177
 Варахамихра (V—VI в.) 180, 199—201,
 235, 335
 ван дер Варден (B. L. van der Waerden,
 р. 1903) 25, 70, 330
 ал-Васири (ум. 847) 212
 Васильев А. В. (1853—1929) 329
 Ведамурти Аия (T. V. Vedomurti Aiyar)
 335
 Вейль (H. Weyl, 1885—1955) 90
 Всепедиктов А. И. 322
 Венкатараман (Venkataraman) 335
 Вердонк (J. J. Verdonk) 341
 Вернан (J. P. Vernant) 333
 Веселовский И. Н. (р. 1892) 116, 123,
 320, 330—332, 339, 340, 341
 Вёпке (Franz Woepcke, 1820—1860) 228,
 339
 Видеман (E. Wiedemann) 239, 327, 339
 Видман (Jan Widmann, 1460 — первая
 половина XVI в.) 290, 291

Вьет (François Viète, Vieta, 1540—1603) 129, 145, 150, 226, 302, 303, 308—314, 326, 341
 Вилейтнер (H. Wieleitner, 1874—1931) 328, 339, 340, 341
 Виллем из Мербеке (Willem van Moerbeke, ок. 1215—ок. 1286) 259, 269
 Вильсон (C. Wilson) 341
 Винтер (J. G. Winter) 336
 да Винчи (Leonardo da Vinci, 1452—1519) 284—286, 289, 322, 324, 340, 341
 Витело (Witelo, ок. 1225—ок. 1280) 269, 321, 340, 341
 Витрувий (Marcus Vitruvius Pollio, I в. до н. э.) 117, 287
 Волкова О. Ф. 335
 Володарский А. И. (р. 1938) 8, 190, 335
 Вуссинг (H. Wussing, р. 1927) 330
 Выгодский М. Я. (1898—1965) 330—334
 Габричевский А. Г. 322
 Галашии С. А. 330
 Галилей (Galileo Galilei, 1564—1642) 92, 129, 138, 269, 271, 279, 280, 283
 Галлей (Халли, E. Halley, 1656—1742) 130
 Гандц (S. Gandz, 1884—1954) 338
 Ганеша (XVI в.) 196, 198
 Ганкель (H. Hankel, 1839—1873) 226
 Гаррнот (Xáppnot, Thomas Harriot, 1560—1621) 313
 Гартнер (W. Hartner) 338
 Гаусс (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855) 60, 86, 105, 138, 165, 174, 330
 Гейберг (J. L. Heiberg) 332
 Генрих III (1554—1589) 308
 Генрих IV (1553—1610) 308
 Георгий Трапезундский (Γεώργιος, 1393—1486) 259
 Гераклит Эфесский (Ἡράκλειτος, ок. 530—470 до н. э.) 64
 Герард Брюссельский (Gerardus, XII—XIII в.) 340
 Герардо Кремонский (Gherardo, 1114—1187) 258, 259, 321
 Герасимов М. М. (1907—1970) 228
 Герберт (Сильвестр II, Gerbert, Silvestrus II, ок. 940—1003) 255—257, 339
 Герман из Далмации (Hermann, XII в.) 258
 Геродиан (Ἡροδιανός, II в.) 62
 Геродот (Ἡρόδοτος, ок. 485—425 до н. э.) 64
 Герон Александрийский (Ἡρων, I в.) 49, 57, 141, 144, 250, 252, 259, 332
 Герсонид (= Бен Гершон)
 Геталди (Гетальди, Marino M. Ghetaldi, 1566—1627) 308, 313, 341
 Гильберт (David Hilbert, 1862—1943) 93, 109, 146
 Гипатия (Ἰππατία, 370—415) 152
 Гиппарх (Ἰππάρχης, 180?—125 до н. э.) 95, 107
 Гипсий Элладский (Ἰππίσιος, V в. до н. э.) 59, 84

Гипшократ из Коса (Ἰπποκράτης) 59
 Гипшократ Хиосский (Ἰπποκράτης, V в. до н. э.) 64, 67, 70, 71, 82, 85, 102, 109, 112, 152
 Гипсикл (Ἰψικλῆς, II в. до н. э.) 114, 140, 289
 Гиясэддин (= ал-Кашш)
 Главиный (S. R. K. Glanville) 27, 330
 Гнеденко Б. В. (р. 1942) 327
 Го Шоу-цзин (1231—1316) 175
 Гожа Ж. (J. Gauja) 8
 Голенищев В. С. 18
 Горнер (William George Horner, 1768—1837) 216
 Гофман (J. E. Hofmann, р. 1900) 328, 341
 Грегори (James Gregory, 1638—1675) 175, 203
 Григорий XIII (1502—1585) 326
 Григорьян А. Т. (р. 1940) 327
 Гроссестест (Гроустест, Robert Grosseteste, ок. 1175—1253) 260, 269, 270, 272, 340
 Гуссов В. В. (р. 1911) 329
 Гуттенберг (J. Gutenberg, ум. 1468) 322
 ад-Даббах Дж. (р. 1940) 335, 336
 Давид Строитель (X в.) 251
 Давидов А. Ю. (1823—1886) 117
 Дамблтон Дж. (J. Dumbleton, первая половина XIV в.) 275
 Данте Алигьери (Dante Alighieri, 1265—1321) 247
 Дарбу (Gaston Darboux, 1842—1917) 117
 Дарий (522—486 до н. э.) 179
 Датта (B. Datta) 335
 Деброн (P. Debron) 328
 Дедекинд (J. W. R. Dedekind, 1831—1916), 61, 77, 97, 98
 Дезарг (Girard Desargues, 1591—1661) 152
 Дейбнер (F. Deubner) 341
 Дейстерхейс (E. Dijsterhuis) 333, 341
 Декарт (René Descartes, 1596—1650) 84, 129, 137, 138, 145, 225, 279, 283, 308, 313, 328
 Демкорит из Абдер (Δημόκριτος, ок. 460—ок. 380 до н. э.) 59, 64, 88, 93, 94, 102, 271
 Деппман И. Н. (1885—1970) 329, 341
 Джамаляздин (Джамал ад-Дин, XIII в.) 243
 ал-Джаухари ал-Аббас пбн Сапд (IX в.) 231
 Дзамберти (Bartolomeo Zamberti, XV в.) 259
 Диксон (L. B. Dickson) 330
 Динзе О. В. 329
 Динострат (Δινόστρατος, IV в. до н. э.) 85, 104
 Диокл (Διοκλῆς, II в. до н. э.) 86, 139
 Дионисий (Διονύσιος) 144
 Дионисолор (Διονυσόδωρος, III—II в. до н. э.) 86
 Диофант (Διόφαντος, III в.) 7, 44, 69, 144—153, 188, 189, 194, 208, 230, 250, 263, 308, 332, 333

Доминго Гонзалес (Domingo Gonzalez, XII в.) 258
 Дороднов А. В. (р. 1908) 85
 Досифей (Δοσιθέης, III в. до н. э.) 115
 Дюпен (F. P. Ch. Dupin, 1784—1873) 117
 Дюрер (Albrecht Dürer, 1471—1528) 284, 324, 325, 340
 Евдем Родосский (Εὐδήμος, ок. 320) 65, 89, 90, 137
 Евдокс Книдский (Εὐδόξος, ок. 406 — ок. 355 до н. э.) 61, 94—104, 110, 111, 142, 222, 328, 333
 Евклид (Εὐκλείδης, 365 — ок. 300 до н. э.) 49, 56, 64, 68—70, 73, 75, 79—88, 96—114, 126, 129, 137, 139, 141, 144, 151, 152, 207, 214, 216, 217, 221, 229—234, 238, 242—244, 249—251, 254, 255, 258—264, 266—270, 280, 281, 289, 304, 307, 321, 325, 326, 331—333, 337—339
 Еврипид (Εὐριπίδης, ок. 480—406 до н. э.) 107
 Евтокий (Εὐτόκιος, VI в. до н. э.) 86, 152, 249, 331
 Египан А. М. 340
 Есенин-Вольпин А. С. (р. 1924) 93
 Жирар (Albert Girard, 1595—1632) 313, 316
 аз-Заркали Абу Исхак Ибрахим ибн Нахйа ан Наккаш (ок. 1030 — ок. 1090) 258
 Зенодор (Ζηνόδωρος, III—II в. до н. э.) 139, 269
 Зенон Элейский (Ζήνων, 490?—430? до н. э.) 89—93, 332
 Зимина Н. А. 8
 Золотарев Е. И. (1847—1878) 77
 Зубов В. П. (1899—1963) 269, 272, 279, 322, 333, 339—341
 Зутер (Heinrich Suter, 1848—1922) 334, 338, 339
 II Силь (VII в.) 175
 Ибн ал-Банна Абу-л-Аббас Ахмед ибн Мухаммед ал-Марракуши (XIII—XIV в.) 227, 336
 Ибн ал-Кифти Абу-л-Хасан Али ибн Юсуф (1173—1248) 128
 Ибн Корра Абу-л-Хасан Сабит ас-Сабит ал-Харрани (836—901) 128—130, 142, 206, 207, 221—224, 229, 232, 235, 236, 239—244, 259, 320, 325, 336—339
 Ибн Рушд Абу Валид Мухаммед ибн Ахмед (1126—1198) 243, 270, 271
 Ибн Сина Абу Али ал-Хусейн ибн Абдалла (980—1037) 206, 207, 243, 335, 336
 Ибн Турк ал-Хуттали Абд ал-Хамид ибн Баси (IX в.) 221
 Ибн ал-Хайсам Абу Али ал-Хасан ибн ал-Хасан (965—1039) 129, 206, 207, 222, 224, 230—232, 234, 240—244, 259, 269, 270, 321, 325, 326, 336, 337

Ибн Халдун Абу Заид Абд ар-Рахман ибн Мухаммед (1332—1406) 227
 Ибн ал-Хасан Абу Джафар Мухаммед (XI в.) 227
 Ибрахим ибн Синан ибн Сабит ибн Корра (908—946) 206, 229, 239, 240, 336
 Иоанн Палермский (Johannes, XIII в.) 266
 Иоанн Севильский (Joannes, XII в.) 258, 302
 Иоганн из Гмундена (Johann, ок. 1380—1442) 260
 Ирани Рида (K. Irani Rida) 338
 Исидор Милетский (Ἰσίδωρος, VI в.) 114, 152, 249
 Исидор Севильский (Isidorus, ок. 570—636) 254
 Итар (J. Itard) 74, 108, 328, 333
 Кавальери (Bonaventura Cavalieri, 1598?—1647) 273, 283
 Каган В. Ф. (1869—1953) 329, 333
 Казизаде Салах ад-Дин Муса ибн Мухаммед ар-Руми (XIV—XV в.) 226, 336
 Кайе (G. R. Kaye) 335
 ал-Каласади Абу-л-Хасан Али ибн Мухаммед (ум. 1486) 227, 336
 Камбиз (ум. 522 до н. э.) 17
 Кампано Джованни (Giovanni Campano, XIII в.) 259, 270, 271
 Кантор Г. (Georg Cantor, 1845—1918) 91, 332
 Кантор М. (Moritz Cantor, 1829—1920) 327, 328
 Капелла Марциан (Martianus Mineus Felix Capella, ок. 450) 254
 ал-Караджки Абу Бакр Мухаммед ибн ал-Хасан (X—XI в.) 222
 Кардано (Girolamo Cardano, 1501—1576) 225, 292—296, 304, 308, 312, 313, 315, 341
 Карл Великий (Charlemagne, 742—814) 246
 Карлебах (J. Carlebach) 340
 Карпинский (Louis Charles Karpinski, р. 1878) 336, 338
 Карпов В. П. 95, 331
 Карпова Л. М. (р. 1934) 336
 ал-Кархи (= ал-Караджки)
 Кары-Ниязов Т. Н. (1897—1970) 337
 Кассиодор Флавий (Flavius Magnus Aurelius Cassiodorus Senator, ок. 480—ок. 575) 254
 Катиджана (VII—V в. до н. э.) 335
 ал-Каши Гийас ад-Дин Джемини (ум. ок. 1530) 174, 178, 206, 210, 213, 214, 216, 225, 226, 229, 236, 300, 336
 Кеннеди (E. S. Kennedy) 334, 338
 Кеплер (Johannes Kepler, 1571—1630) 129, 138, 237, 281, 321
 Кеттон (Walter Ketton, ум. 1342) 272
 Кир (559—530 до н. э.) 35
 Киркич Новгородец (р. 1110) 253, 339, 340
 Клавий (Christophorus Clavius, 1537—1612) 326, 341
 Клагетт (M. Clagett) 340

- Клейн И. (J. Klein) 333
 Клейн Ф. (Felix Klein, 1849—1925) 97, 135
 Клеро (Alexis Claude Cleuraud, 1713—1765) 192
 Клеини (S. C. Kleene) 93
 Колмогоров А. Н. (р. 1903) 328
 Коляма Я. Я. (р. 1892) 330, 333
 Конон Самосский (Κόνων, III в. до н. э.) 115
 Константин 245
 Конфуций (Кунцзы, 551—479 до н. э.) 156
 Копелевич Ю. X. (р. 1921) 209
 Коперник (Nicolaus Copernicus, 1473—1543) 143, 248, 260, 285, 308, 320, 321, 341
 Корвин Матвей (1443—1490) 318
 Коста пбн Лука ал-Ба'лабакки (ум. 912) 150, 219
 Копп (Augustin Cauchy, 1789—1857) 148
 Крамер (Gabriel Cramer, 1704—1752) 167
 Краснова С. А. (р. 1937) 231, 336, 337
 Краузе (Max Krause, 1909—1944) 334
 Кребс 317
 Кромби (A. C. Crombie) 334, 340
 Кронекер (Leopold Kronecker, 1823—1891) 77, 312
 Кросби (H. L. Crosby) 340
 Крыжановский Д. А. (1883—1938) 97
 Ксенофан (Ξενοφάνης) 64
 Кубесов А. (р. 1931) 338
 Кубицкий А. В. 67, 331
 Кулидж (J. L. Coolidge) 328, 380
 Кулишер А. 329
 Куммер (Ernst Kummer, 1810—1893) 77
 Кундури Амид ал-Мулк Абу Наср Мансур пбн Мухаммед (1024—1064) 237
 Курце (Maximilian Curtze, 1837—1903) 340
 Кутлумуратов Дж. 329
 ал-Кухи Абу-с-Салх Вайджан пбн Рус-там (X в.) 240
 ал-Кушчи Ала ал-Дин Али пбн Мухаммед (ум. ок. 1474) 206, 218, 244, 317, 336
 Кушьяр пбн Лаббан ал-Джилли (ок. 971—1024) 212, 213, 264, 337
 Каджори (Florían Cajori, 1859—1930) 328
 Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813) 105, 117, 195, 328
 Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728—1777) 77, 229, 233
 Ландау (E. Landau) 330
 Лапко А. Ф. (р. 1919) 8
 Лаплас (Pierre Simon Laplace, 1749—1827) 328
 Лебег (H. Lebesgue, 1875—1941) 11
 Леви-Брюль (L. Levy-Bruhl) 330
 Лежандр (Adrien Marie Legendre, 1752—1833) 229, 232
 Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716) 84, 129, 167, 203, 212, 275, 328
 Ленин В. И. (1870—1924) 93, 245
 Леон (Λέων, IV в. до н. э.) 109
 Леонардо Пизанский (Фибоначчи, Leonardo Pisano, 1180—1240) 84, 174, 190, 218, 228, 244, 260—268, 287, 301, 304, 315, 339
 Либри (G. Libri, 1803—1869) 265, 340
 Линдеман (F. Lindemann, 1852—1939) 15, 85
 Липшиц (R. Lipschitz, 1832—1903) 97
 Лисий (Λύσιος) 58
 Лихин В. В. (р. 1905) 329
 Лобачевский Н. И. (1792—1856) 232, 234
 Лориа (Gino Loria, 1862—1954) 328—330
 Лосев А. Ф. 332
 Лукомская А. М. 329
 Лурье С. Я. (1890—1965) 40, 331, 333
 Лю Хуэй (III в.) 162, 163, 177, 178
 Лю Чжо (VI—VII в.) 174, 175
 Люккей (Paul Luckey) 338
 Лютер (Martin Luther, 1483—1546) 284, 298
 Магавира (IX в.) 180, 190—193, 197, 201, 335
 Магистрос Григорий (ок. 990—1058) 251
 Магницкий Л. Ф. (1669—1739) 285, 291, 299, 301, 302, 307, 339
 ал-Маджрити Абу-л-Касим Маслама пбн Ахмед (ум. ок. 1007) 258
 Майснер (B. Meissner) 48
 Майстров Л. Е. (р. 1920) 329, 333, 341
 Макпавелли 284
 Маковельский А. О. 68, 89, 90, 332
 Малик-шах Джамал ад-Дин (ум. 1092) 215
 Мамедбейли Г. Д. (р. 1914) 336, 337
 ал-Ма'мун (ум. 833) 212
 Маркс (Karl Marx, 1818—1883) 274
 Маркушевич А. И. (р. 1908) 329, 333
 Марр (A. Marre) 341
 Марцелл (Marcus Claudius Marcellus, ум. 208 до н. э.) 116
 Мас'уд пбн Махмуд (ум. 1040) 224
 Матвиевская Г. П. (р. 1930) 337
 Маттиссен (L. Matthiessen) 330
 ал-Махани Абу Абдаллах Мухаммед пбн Иса (ум. ок. 880) 217, 222
 Махмуд Газневи (ум. 1030) 180, 206, 223
 Медвелев Ф. А. (р. 1923) 8
 Меддисон (F. R. Maddison) 8
 Медовой М. И. (1925—1962) 336, 337
 Менголи (P. Mengoli, 1625—1686) 281
 Менелай (Μενέλαος, I—II в.) 95, 141, 142, 208, 236, 259, 332
 Менес (Мина, ок. 3000 до н. э.) 17
 Менехм (Μένειμος IV в. до н. э.) 83, 130, 222
 Меннингер (K. Menninger) 330
 Мердок (J. E. Murdock) 339
 Миками (Y. Mikami, ум. 1950) 334
 Миклухо-Маклай Н. И. (1849—1888) 10
 Миелли (Aldo Mieli, р. 1879) 338
 Михайлов А. А. (р. 1888) 340
 Молодший В. Н. (р. 1906) 333
 Монж (Gaspard Monge, 1746—1816) 328
 Монталембер (M. R. Montalembert, 1714—1800) 284

- Монтюкла (J. E. Montucla, 1725—1799) 328
 Морган (J. Morgan) 9
 Мордухай-Болтовской Д. Д. (1876—1952) 96, 328, 331
 Мориц Оранский (Maurits van Oranje, 1567—1625) 303
 Московитос Мануил (Μανουήλ Μεσχιτο-
 σιλος, XIII—XIV в.) 250
 Муавр (Abraham de Moivre, 1667—1754) 298
 Мукунда (M. K. Mukunda) 335
 Мухаммед (571—632) 205
 Мухаммед II (ум. 1481) 218
 Мэн-цзы (372—289 до н. э.) 158
 Мюир (Th. Muir) 330
 Мюллер (Регномонтан, Johannes Müller, Regiomontanus, 1436—1476) 238, 244, 260, 302, 317—320, 341
 Набонассар (747—735 до н. э.) 34
 Нарайана (XIV в.) 180, 192, 196, 210, 202
 ан-Найризи Абу-л-Аббас ал-Фадл ибн Хатим (X в.) 259, 325, 336
 ан-Насани Абу-л-Хасан Али ибн Ахмед (ум. ок. 1030) 212, 214, 264, 336, 338
 Нейгебауер (Otto Neugebauer) 23, 33, 35, 40, 43, 49, 327, 330, 331, 333, 337
 Неморарий Иордан (Jordanus Nemoragius, XII в.) 267, 268, 339, 340
 Нефертити 20
 Нётер (Max Noether, 1844—1921) 329
 Нидем (Joseph Needham, p. 1900) 61, 183, 334
 Низам ал-Мулк (1017—1092) 215
 Николай Кузанский (Nikolaus von Cues, 1401—1464) 92, 317, 341
 Николай V 322
 Никомех (Νικολαῖος, I—II в.) 251, 254, 267, 332
 Никомед (Νικολήδης, II в. до н. э.) 139
 Нилаканта (XV—XVI в.) 180, 202, 203
 Но (F. Nau) 183
 Ньютон (Isaac Newton, 1643—1727) 97, 108, 114, 129, 138, 175, 203, 306, 314, 328, 332
 Одоакр (ум. 493) 245
 Орбели И. А. (1887—1961) 339
 Орем (Nicole Oresme, ок. 1323—1382) 260, 271, 274—283, 290, 306, 339, 340
 Ольшки Л. (L. Olschki) 334
 Ото (Valentin Otto, ок. 1550—1605) 178
 Оттон I (912—973) 246
 Паев М. Е. (p. 1911) 333
 Панджава И. Д. 339
 Папп (Πάππος, III в.) 84, 108, 129, 130, 139, 151, 332, 333
 Парменид (Παρμενίδης, V в. до н. э.) 64, 89
 Паскаль (Blaise Pascal, 1623—1662) 152, 328
 Паулуса (из Санитры) 180
 Паулос (Παῦλος, IV в.) 180
 Пачоли (Luca Pacioli, ок. 1445—ок. 1514) 185, 286—289, 292, 293, 304, 315, 341
 Пединасим Иоанн (Ιωάννης Πεδινάσιμος, XIV в.) 250
 Пеиербах (Georg Peurbach, 1423—1461) 302, 317
 Пелакани (Biagio Pelacani, ум. 1461) 281
 Петрици Иоане (ок. 1055—1130) 251, 339
 Петросян Г. Б. (p. 1902) 340
 Пит (Т. Е. Peet) 18, 33, 334
 Пифагор (Πυθαγόρας, VI в. до н. э.) 66, 67, 256, 271, 333
 Платон (Πλάτων, 429—348 до н. э.) 59, 64, 73—74, 89, 95, 106, 107, 249, 271, 332, 333
 Платон Тивольский (Plato, XII в.) 258
 Пловий (Е. В. Plooi) 338
 Плутарх (Πλούταρχος, ок. 50—120) 116, 117
 Погендорф (Johann Christian Poggendorff, 1796—1877) 329
 Погребынский И. Б. (p. 1906) 328
 Полибий (Πολύβιος, II в. до н. э.) 116
 Поло (Marco Polo, 1254—1323) 157, 289
 Прокл Диадокх (Πρόκλος ὁ Διάδοχος, 410—485) 33, 65, 66, 109, 110, 129, 152, 249, 251, 259, 332, 339
 Протагор (Προταγόρας, 480—411 до н. э.) 94
 Псамметих I 17, 59
 Пселл (Μιχαήλ ὁ Ψελλός, 1018 — после 1078) 144, 249, 286, 291
 Птолемей Клавдий (Κλαύδιος Πτολεμαῖος, ум. ок. 170 г. н. э.) 95, 106, 107, 142—144, 152—154, 207, 236, 241, 243, 259, 269, 320, 321, 332
 Птолемей I Сотер (Πτολεμαῖος, ум. 283 до н. э.) 106—108
 Пуанкаре (Henri Poincaré, 1854—1912) 146, 151
 Пудра (N. G. Poudra) 330
 Пушкин А. С. (1799—1837) 248
 Раик А. Е. (p. 1903) 31, 330, 331, 333
 Раджагопал (С. Т. Rajagopal) 335
 Раймонд I (Raymond, 1126—1151) 258
 Райнд (Henry Rhind) 18—20, 23, 24, 27, 29—31
 Рамануджан С. (1887—1920) 204
 Раме (Ramus, Pierre de la Ramee, Petrus Ramus 1515—1572) 307, 308, 341
 Рамсес II (1317—1251 до н. э.) 17
 Рангачарья 193
 Рейдемейстер (Kurt Reidemeister, p. 1893) 333
 Рейф (R. Reiff) 330
 Ретик (Georg Joahim Rheticus, 1514—1576) 320
 Ризе (Adam Riese, Gigas, 1489—1559) 290, 291, 341
 Ризнер (F. Risnerus, XVI в.) 321
 Риман (Bernhard Riemann, 1826—1866) 117, 124, 139, 232, 234
 Риттер (M. F. Ritter) 308, 310, 341
 Рихман Георг Вильгельм (1711—1753) 269
 Риччи Д. И. (D. I. Ricci) 341

- Риччи М. А. (M. A. Ricci, 1619—1692) 128
 Риппе из Реймса (Richer, X в.) 256
 Роберт Липколевский (= Гроссетест)
 Роберт Честерский (Robert, XII в.) 258
 де Роган 308
 Рожанская М. М. (р. 1928) 337
 Розенфельд Б. А. (р. 1917) 8, 209, 215,
 333—339
 ван Ромен (van Roemen, Adriaen van Ro-
 men, 1561—1615) 229, 312
 Ромул-Августул (Romulus Augustulus) 245
 Рублев Андрей (ок. 1360—1430) 247
 Рудольф (Křišťan Rudolf, ок. 1500 —
 ок. 1545) 212, 290, 291, 299—304, 341
 ар-Руми (= Казизаде)
 Руттен (M. Rutten) 52, 334
 Руффини (Paolo Ruffini, 1765—1822) 105,
 216
 Руска (Julius Ruska, 1867—1949) 338
 Рыбкин Г. Ф. (р. 1903) 327
 Рыбников К. А. (р. 1913) 274, 327, 328
 Сабо А. 333
 Савасорда (= Бар Хийя)
 Садыков Х. У. 338
 Сайдан (A. S. Saidan) 338
 Сайили (A. Sayili) 338
 Саккери (Girolamo Saccheri, 1667—1733)
 234
 Сакс (A. Sachs) 35, 49
 ас-Салар Хусам ад-Дин Али ибн Фад-
 лаллах (ум. 1262) 238
 Салье М. А. 336
 ас-Самарканди Шамс ад-Дин (XIII—
 XIV в.) 337
 Сартон I (ум. 705 до н. э.) 34
 Саркавар Овалес (ок. 1045—1129) 251
 Сартон (George Sarton) 329
 Север Себохт (VII в.) 183
 Сегаль В. С. 215, 336
 Секи Кова Шинсуке (1642?—1708) 167
 Сережников В. 75
 ас-Сиджиззи Абу Саид Ахмед ибн Мухам-
 мед ибн Абу ал-Джалил (ок. 951 —
 ок. 1024) 229
 Симпликий (Σιμπλικιος, ум. 549) 89,
 90, 95, 152, 249
 Сингх А. Н. (A. N. Singh) 335
 Сингх Савай Джайи (1686—1783) 180, 207
 Скотт (Duns Scott, ок. 1265—1308) 274
 Скипарелли (G. Schiaparelli, 1835—1910)
 95
 Смит (David Eugene Smith, 1860—1944)
 181, 328, 338
 Собиров Г. С. (р. 1935) 338
 Соболевский С. И. 58
 Сократ (Σοκράτης, 469—399 до н. э.)
 59, 74
 Софокл (Σοφοκλής, 426—406 до н. э.) 107
 Спасский И. Г. (р. 1904) 340
 Стевин (Simon Stevin, 1548—1620) 117,
 214, 298, 301, 303—306, 308, 341
 Стройк (Dirk Jan Struik, р. 1894) 328,
 341
 Струве В. В. (1889—1965) 19, 32
 Стяжкин Н. И. (р. 1932) 329
 Суайнхед (Swincer, Richard Swineshead,
 ок. 1350) 273—275, 277, 280
 Сулла (138—78 до н. э.) 140
 Сунь-цзы (III в.) 160—162, 165, 174, 334
 Схоотен (F. van Schooten, 1615—1660)
 308
 Таннери (Paul Tannery, 1843—1904) 328,
 333
 Тарталья (Niccolo Tartaglia, 1500—1557)
 259, 292—296, 298, 301, 304, 306, 308,
 341
 Теодор (Theodorus, XII—XIII в.) 262
 Теодорих Великий (ок. 454—526) 254
 Теодосий (Θεοδοσιος, II в. до н. э.) 332
 Теон Александрийский (Θεων, IV в.)
 139, 152
 Теон Смирнский (Θεων, II в.) 141
 Тертуллиан (ок. 150—222) 151, 246
 Тезтет (Θεαττης, IV в. до н. э.) 67, 70,
 74, 75, 77, 95, 96, 113
 Тейлиц (O. Toerplitz, 1881—1940) 327
 Тиглатнилесар III (745—727 до н. э.) 35
 Тимур (1333—1405) 180, 206
 Тимченко И. Ю. (1862—1939) 328, 329
 Тогрул-бек (1038—1063) 237
 Томас (Alvarus Thomas, XV—XVI в.
 282, 283
 Томсон (W. Thomson) 333
 Торричелли (E. Torricelli, 1608—1647)
 128
 Тот (I. Tóth) 110, 333
 Тренсю (W. R. Transue) 338
 Тропфке (Johannes Tropicke, 1866—1939)
 328
 Тураев Б. А. (1868—1920) 19, 330
 ат-Туси Насир ад-Дин Абу Джафар Мухам-
 мед ибн Мухаммед (1201—1274) 206,
 207, 215, 216, 218, 234, 238, 243, 244,
 300, 336, 337
 Тутмос I (XVI в. до н. э.) 17
 Тюро-Данжен (F. Thureau-Dangin) 35, 331
 Тяхик (Τύχικος, VII в.) 251
 Уитни (G. Whitney) 335
 ал-Уклидиси Абу-л-Хасан Ахмад (X в.)
 214
 Улугбек Мирза Мухаммед ибн Шахрух
 ибн Тимур (1411—1449) 206, 208, 213,
 214, 218, 226, 228, 244, 336
 Умаров С. У. 336
 Урбино (XV в.) 287
 Успенский В. А. (р. 1930) 93
 Фалес Милетский (Θαλῆς, ок. 624—548
 до н. э.) 64—66, 152
 Фан Мун-чи (XIII в.) 243
 ал-Фараби Абу Наср Мухаммед ибн
 Мухаммед (ок. 870—950) 230, 336, 338
 Фахр ал-Мулк (X—XI в.) 222
 Фаццари (Gaetano Fazzari) 330
 Фейдий (Φειδιος, IV в. до н. э.) 109
 Феодор Киренский (Θεοδωρος, V в. до
 н. э.) 59, 66, 74, 75, 77, 95

- Феодор из Клазомен (Θεόδωρος Κλαζομάνος, XIV в.) 252
 Феодосий (Θεόδωρος, I в. до н. э.) 208, 259, 271
 Фер Экке (P. Ver Eecke) 137, 146
 ал-Фергани Ахмед ибн Мухаммед (IX в.) 206
 Ферма (Pierre Fermat, 1601—1665) 129, 138, 148—151, 195, 239, 279, 281, 283, 311, 328
 Феррари (Ludovico Ferrari, 1522—1565) 294—296
 Ферро (Scipione del Ferro, 1456—1526) 292, 293
 Феттер (G. Fetter) 341
 Фибоначчи (= Леонардо Пизанский)
 Фидий (Φειδίας, III в. до н. э.) 59, 115
 Фидий (ок. 382—336 до н. э.) 59, 106
 Филон (Φίλων, III в. до н. э.) 89
 Фине (Finеус, Oronce Fine, 1494—1555) 302
 Финк (Thomas Fink, 1561—1656) 321
 Флор (Anton Maria Fior, XV—XVI в.) 292
 Фогель (Kurt Vogel, р. 1888) 44, 46, 331, 340
 Фома Аквинский (Thomas Aquinas, 1225—1274) 274
 Фонах (A. Fonahn) 285
 Фохт Б. А. 331
 Франк (E. Frank) 333
 Франчески (Piero dei Franceschi, 1416 — 1492) 286, 322, 323
 Фрейденталь (Hans Freudenthal, р. 1905) 8, 183
 Фридлейн (C. Friedlein) 33
 Фридрих II (Fredericus, 1194—1250) 262, 266
 Фурье (Joseph Fourier, 1768—1830) 328
 ал-Хабаш Ахмед ибн Абдалла ал-Мар-вази ал-Хасиб (ок. 770—ок. 870) 206, 235, 236
 ал-Хазин Абу Джафар (X в.) 222
 Хайретдинова Н. Г. (р. 1937) 8, 336, 338
 Хайям Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим (1048—1131) 191, 206, 207, 214, 215, 217, 218, 224—226, 233, 234, 238, 325, 326, 336, 337
 Халидов А. Б. 336
 Хаммурапи 34
 Харкли (Henri Hankley, ум. 1371) 272
 Хачик Георг 252
 Хейтесбери (William Huytesbury, ок. 1313—1372) 275, 280
 Хеоис (Хуфу, начало III тысячелетия до н. э.) 17
 Хефрен (Хафра, III тысячелетие до н. э.) 17
 Хисс (Thomas Little Heath, 1861—1940) 332, 333
 Хопсток (H. Hopstock) 285
 ал-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед ибн Муса ал-Маджуси (787 — ок. 850) 57, 177, 206, 209—221, 231, 235, 244, 257—259, 264, 268, 291, 336, 337
 Хосров Ануширван (531—579) 249
 Хубилай-хан (1216—1265) 175, 253
 ал-Худжанди Абу Махмуд Хамид ибн ал-Хидр (ум. ок. 1000) 228
 ал-Худжанди Абу Мухаммед 228
 Хулагу-хан (1217—1265) 206, 215, 238, 253
 Хунгер (H. Hunger) 340
 Цезарь (Cajus Julius Caesar, 104—44 до н. э.) 140
 Цейтен (Hieronimus Georg Zeuthen, 1839—1920) 113, 130, 137, 330, 333
 Целлер (M. C. Zeller) 341
 Цзинь Цзю-шао (XIII в.) 177
 Цзю Чун-чжи (430—501) 173, 178
 Цзя Сянь (XIII в.) 174
 Цинь Цзю-шао (XIII в.) 173, 174
 Цицерон (Marcus Tullius Cicero, 106—43 до н. э.) 116, 117
 Цхакая Д. Г. (р. 1899) 340
 Чандрагупта (ум. 298 до н. э.) 179
 Чеботарев Н. Г. (1895—1947) 85
 Чейс (A. Chace) 19
 Челеби Махмуд ибн Мухаммед Мирим (ум. ок. 1525) 226
 Чжа-Ма-Лу-Тин (= Джамалэддин)
 Чжан Хен (78—139) 177
 Чжан Цан (ум. 150 до н. э.) 161
 Чжан Цю-цзянь (V в.) 163, 334
 Чжень-фан (VII в.) 162
 Чжу Ши-цзе (XIII в.) 173—175
 Чингис-хан 206, 248
 Чень-цзы (VI в.) 176
 Шаль (M. Chasles, 1793—1880) 329
 Шан Гао (1100 до н. э.) 176
 Шафрановский К. И. 329
 Швецов К. И. (р. 1913) 341
 Шереметевский В. П. (ум. 1919) 328
 Ши Хуан-ди 156
 ал-Ширази Кутб ад-Дин Махмуд ибн Мас'уд (1236—1311) 207
 Ширакаци Аналия (VII в.) 251, 252, 339
 Ширмер (O. Schirmer) 242, 338
 Шлюссель (= Клавий)
 Шой (C. Schoy, ум. 1925) 338
 Шрамм (M. Schramm) 338
 Шрейдер С. Н. (1878—1948) 339
 Шридхара (IX—X в.) 180, 181, 185, 187, 193, 195, 197, 198, 335
 Шрипати (XI в.) 196
 Штейнер (Jacob Steiner, 1796—1863) 138
 Штейншнейдер (Moritz Steinschneider, 1816—1907) 338—340
 Штеккель (P. Stäckel, 1862—1919) 330
 Штифель (Michael Stifel, 1486—1567) 298—307, 315, 316, 341
 Штокало И. З. (р. 1897) 327—329
 Шэнн Ко (XI в.) 175
 Шюке (Nicolas Chuquet, ум. ок. 1500) 185, 289, 298, 307, 315, 341
 Эйзендор (A. Eisenlohr) 18, 330
 Эйлер (Leonhard Euler, 1707—1783) 69, 117, 174, 195, 203, 228, 265, 328
 Эйштейн (Allert Einstein, 1879—1955) 114, 138

Энгель (F. Engel, 1861—1941) 330
Энгельс (Friedrich Engels, 1820—1895)
247, 248, 284, 285
Энестрем (Gustav Eneström, 1852—1923)
341
Эратосфен из Кирены (Ἐρατοσθένης,
276—194 до н. э.) 107, 115, 122
Эрман В. Г. 336
Эрмит (Charles Hermite, 1822—1901) 85,
312
Эсхил (Ἔσχυλος, 525—456 до н. э.) 59,
107

Юлиан (Julianus, 331—363) 245
Юнге (G. Junge, p. 1917) 333
Юстиниан (Justinianus, 483—565) 152,
245, 249
Юсупов Н. 338
Юшкевич А. П. (p. 1906) 215, 327—338
Юшкевич П. С. (1873—1945) 113, 328,
333, 334
Ягодинский И. 331
Ян Хуэй (XIII в.) 174
Яновская С. А. (1896—1966) 331, 333

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН ДО НАЧАЛА XIX СТОЛЕТИЯ

Том первый

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
С ДРЕВНЕЙШИХ ВРЕМЕН ДО НАЧАЛА НОВОГО ВРЕМЕНИ

Утверждено к печати

Институтом истории естествознания и техники АН СССР

Редактор А. Ф. Лапко

Художник М. К. Шевцов, Художественный редактор Н. Н. Власик
Технический редактор В. Г. Лаут

Сдано в набор 3/VII 1970 г. Подписано к печати 7/XII 1970 г. Формат 70×100^{1/16}

Бумага № 1. Усл. печ. л. 28,38. Уч.-изд. л. 24,1 Тираж 7200 экз. Т-17675

Тип. зак. 1012 Цена 1 р. 92 к.

Издательство «Наука». Москва К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука». Москва Г-69, Шубинский пер., 10